Trabajo Fin de Máster

Título del trabajo:
Geometría de la Circunferencia en 1º ESO
English tittle:
Circle Geometry in 1º ESO (7th Grade)

Autora

Belén Gracia Latorre

Director/es

Julio Sancho Rocher

Facultad de Educación
Año 2016

Índice

1. Introducción.....5
2. Sobre los conocimientos previos y los contenidos.....13
3. Razón de ser del objeto matemático.....17
4. Propuesta didáctica.....19
4.1 Campos de problemas, técnicas y tecnologías.....19
4.2 Metodología y organización del aula.....21
4.3 Secuencia didáctica.....23
5. Evaluación.....48
5.1 La prueba escrita.....49
5.2 Qué se quiere evaluar.....54
5.3 Respuestas esperadas y posibles errores.....56
5.4 Criterios de calificación y guía de corrección.....63
6. Referencias.....70
Anexo I. Prueba de conocimientos previos.....72
Anexo II. Ejercicios de refuerzo.....76
Anexo III. Portfolio para el alumnado.....82
Anexo IV. Grupos Interactivos.....121

1. Introducción

Cuando se aborda el tema de geometría en el aula, en muchas ocasiones, se produce una ruptura con todo lo que se estaba viendo hasta el momento en la asignatura de Matemáticas. Los temas de geometría, junto con los de probabilidad y estadística, suelen estar situados al final del libro de texto y son los primeros en ser sacrificados en caso de que el calendario no permita terminar todo el temario.

A pesar de que la geometría está relacionada con prácticamente todo el resto de objetos matemáticos, se presenta de forma aislada, casi como si se tratara de otra asignatura, por lo que es difícil que los alumnos puedan relacionarlos con conocimientos previos o utilizar estrategias que ya conocen para resolver problemas geométricos. Esta situación, también impide utilizar métodos geométricos para resolver problemas que normalmente no consideramos geométricos. Con un nivel más profundo de razonamiento geométrico del alumnado se podrían abordar otros contenidos matemáticos como las funciones, los sistemas de ecuaciones, conceptos tan ligados normalmente a la aritmética o el álgebra como son las fracciones, distancias entre números, los valores absolutos de los números enteros, etc. con una mayor comprensión de las relaciones que se están estudiando. Los conceptos de divisibilidad y proporcionalidad son ejemplos claros de conceptos transversales a todos los ámbitos matemáticos a los que la geometría puede aportar una perspectiva complementaria y un campo de aplicación.

Otra de las críticas que se hacen a la forma en la que se suele enseñar la geometría, es que se hace de forma poco razonada. Martínez y Juan (1989) comentan que es muy sencillo sentar la fórmula de la longitud de la circunferencia e indicar que el número **π** puede aproximarse al valor 3,1416 o incluso a 3,14 y proponer una batería de ejercicios en los que unas veces se pide determinar la longitud y otras el radio. Sentencian que “De este modo, en menos de una semana, se acaba la tarea y se puede pasar a otras cuestiones” (pág. 122), para terminar preguntándose sobre el valor educativo de un planteamiento de este estilo.

Existe mucha literatura sobre la enseñanza de la geometría. Desde mi punto de vista la labor de un profesor o profesora es aprender de las personas que han reflexionado sobre esta cuestión anteriormente y tomar ideas de actividades y metodologías para adaptarlas a las circunstancias de cada clase, alumnado y de su propio estilo. La gran mayoría de las actividades que se proponen en este Trabajo Fin de Máster para la enseñanza de la geometría de la circunferencia en el primer curso de ESO son adaptaciones de actividades que profesionales que han trabajado ya en la enseñanza de la geometría han desarrollado o han adaptado de otros profesionales anteriores.

Tanto la legislación nacional (Real Decreto 1105/2014), como el currículo aragonés (Orden ECD/489/2016) incluyen un bloque de Geometría para la asignatura de Matemáticas en el primer ciclo de ESO. Los contenidos de geometría para el primer curso de la ESO en el currículo aragonés son:

- Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad.
- Ángulos y sus relaciones.
- Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades.
- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones.
- Medida y cálculo de ángulos de figuras planas.
- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares.
- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Aplicaciones directas.
- Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Además de contenidos de geometría, en la propuesta didáctica desarrollada en este TFM, se incluyen contenidos correspondientes al Bloque de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas:

- Planificación del proceso de resolución de problemas.
- Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de

la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

- Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:

a) la recogida ordenada y la organización de datos;

b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos;

c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico;

d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas;

e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos;

f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Para la realización de este TFM se ha analizado el bloque de geometría plana de los libros de texto de 1º ESO de las editoriales Anaya (Colera J. y Gaztelu, I, 2014), Bruño (Arias, J.M. y Maza, I., 2011), Oxford (Contreras, I., Fernández, I., Lobo, B., Pérez, J. L., Uriondo y J. L., 2011) y McGraw-Hill (Bartomeu, C., Capella, T., Besora, J., Jané, A. y Guiteras, J. M., 2011).

Todos son bastante parecidos tanto en lo referente al orden de presentación de los contenidos como a los problemas, técnicas y tecnologías que incluyen. Hay una excepción y es el texto de McGraw-Hill (Bartomeu et al., 2011), que desde mi punto de vista sigue una secuencia más coherente que el resto y no banaliza ni pasa de puntillas por contenidos como "qué es el número **π**" al que aludían Martínez y Juan (1989).

Hay contenidos interesantes en todos los textos. Por ejemplo, en el de la editorial Bruño

(Arias y Maza, 2011), se dedican unas páginas al final de cada unidad didáctica a explicar con mucho detalle cómo realizar construcciones con GeoGebra para trabajar lo visto en ella. El texto de la editorial Oxford (Contreras, I. et al., 2011), para abordar la resolución de problemas de manera explícita, propone una técnica distinta en cada unidad didáctica (no sólo en las de geometría), como por ejemplo: hacer un dibujo relativo al problema, partir de un modelo más simple, descomponer un problema en otros más sencillo, etc. En el de la editorial Anaya (Colera y Gaztelu, 2014) se dedican unas páginas a entender el número **π** y a conocer cómo se ha aproximado históricamente; también hay unas páginas al final de cada unidad didáctica que invitan a la reflexión y al razonamiento sobre las figuras geométricas. Sin embargo, desde mi punto de vista, me parece que los autores apuntan estos aspectos como curiosidades, actividades opcionales o periféricas, y no como actividades centrales que sirven para adquirir conocimientos y para profundizar en el razonamiento geométrico.

Resulta interesante analizar el campo de problemas, técnicas y tecnologías que se describen en los libros de texto. Para analizar los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente, me basaré en los libros de texto de dos editoriales: McGraw-Hill (Bartomeu et al., 2011) y Anaya (Colera y Gaztelu, 2011), que me resultan las más interesantes.

El texto de la editorial Anaya (Colera y Gaztelu, 2011), contiene 3 Unidades Didácticas (de un total de 14) dedicadas a la Geometría. En lo referente a la geometría de la circunferencia casi todo lo expuesto es eminentemente teórico. A continuación se hace una relación de contenidos, campos de problemas, técnicas y tecnologías relativas a la geometría de la circunferencia en el orden de aparición en el texto:

<table>
<tr><td colspan="2">En la UD11. Rectas y ángulos.
Relación entre los ángulos inscritos y centrales de una circunferencia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Campos de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">• No hay problemas, sólo ejercicios.
• Ejercicios de cálculo de ángulos inscritos conociendo otro ángulo inscrito o el ángulo central que abarca el mismo arco y viceversa.</td></tr>
<tr><td>Técnicas</td><td>Tecnologías</td></tr>
<tr><td>- Cálculo de ángulos inscritos conociendo otro ángulo inscrito que abarca el mismo arco.
- Cálculo de ángulos inscritos conociendo el ángulo central que abarca el mismo arco y viceversa.</td><td>- Hay propuestas experimentales para comprobar que los ángulos inscrito que abarcan el mismo arco son iguales.
- Se propone la realización de mediciones con ayuda del transportador de ángulos para comprobar la relación entre los ángulos inscritos y el central que abarcan un mismo arco.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la UD12. Figuras geométricas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Circunferencias asociadas a un triángulo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Campos de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">• No hay problemas, sólo ejercicios.
• Dado un triángulo, halla su circuncentro y/o su incentro y traza las circunferencias.</td></tr>
<tr><td>Técnicas</td><td>Tecnologías</td></tr>
<tr><td>- Encontrar el circuncentro de un triángulo mediante el trazado de las mediatrices de sus lados.
- Encontrar el circuncentro de un triángulo mediante el trazado de las mediatrices de sus lados.</td><td>- No hay tecnología asociada.
- No hay tecnología asociada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la UD12. Figuras geométricas.
Definición de circunferencia y posiciones relativas de dos circunferencias y entre una circunferencia y una recta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Campos de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">• No hay problemas, sólo ejercicios.
• Ejercicios de construcción de circunferencias y rectas en distintas posiciones relativas.
• Ejercicios de cálculo de distancias entre centros de circunferencias en distintas posiciones relativas.</td></tr>
<tr><td>Técnicas</td><td>Tecnologías</td></tr>
<tr><td>- Cómo trazar una recta tangente a una circunferencia. No se explica pero se plantea en una actividad.
- Cómo trazar dos circunferencias tangentes exteriores entre sí. No se explica pero se plantea en una actividad.
- Cómo trazar dos circunferencias tangentes interiores entre sí. No se explica pero se plantea en una actividad.
- Cómo trazar dos circunferencias concéntricas. No se explica pero se plantea en una actividad.</td><td>- Definición de recta tangente a una circunferencia a través de una imagen. En ella se muestra que se cortan en un solo punto y que la distancia de la recta al centro es igual al radio. La distancia de una recta a un punto se mide en la perpendicular a la recta.
- Definición de circunferencias tangentes exteriores a través de una imagen. En ella se muestra que son exteriores, que se cortan en un solo punto y que sus centros y el punto de corte están alineados.
- Definición de circunferencias tangentes interiores a través de una imagen. En ella se muestra que una es interior a la otra, que se cortan en un solo punto y que sus centros y el punto de corte están alineados.
- Definición de circunferencias concéntricas a través de una imagen. En ella se muestra que una es interior a la otra y que tienen como centro el mismo punto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la UD13. Áreas y perímetros.
Definición de circunferencia y posiciones relativas de dos circunferencias y entre una circunferencia y una recta.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Campos de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Ejercicios de cálculo de longitudes de arcos conociendo el ángulo y el radio.
Ejercicios de cálculo de áreas de sectores circulares conociendo el ángulo y el radio.
Ejercicios de cálculo de perímetros por descomposición en figuras, a partir de una imagen.
Ejercicios de cálculo de áreas por descomposición en figuras, a partir de una imagen.
Un problema verbal relacionado con la longitud de la circunferencia.
Un problema verbal relacionado con longitud, área y volumen.
</td></tr>
<tr><td>Técnicas</td><td>Tecnologías</td></tr>
<tr><td>- Cálculo del perímetro de una circunferencia conociendo su radio.
- Cálculo del área de una circunferencia conociendo su radio.
- Cálculo de longitudes de arcos conociendo el ángulo y el radio. A través del cálculo de la longitud del arco de 1º dividiendo la longitud entre 360º y multiplicando por el ángulo.
- Cálculo de áreas de sectores circulares conociendo el ángulo y el radio.</td><td>- Planteamiento de la fórmula y la aproximación histórica del número π.
- Deducción de la fórmula por descomposición del círculo en sectores muy finos.
- Proporcionalidad entre la amplitud del ángulo y la longitud del arco.
- Proporcionalidad entre la amplitud del ángulo y la longitud del arco.</td></tr>
</table>

El texto de la editorial McGraw-Hill (Bartomeu et al., 2011), dedica 4 Unidades Didácticas (de un total de 12) a la Geometría. Se trata de las unidades 5-8, por lo que están planificadas para el segundo cuatrimestre. La forma y el orden de plantear los contenidos es muy gradual y consistente, de manera que cada contenido se basa en lo explicado anteriormente. De las 4 UD, hay una dedicada exclusivamente a la circunferencia y es la que va a ser analizada con más detalle. Además plantea problemas en la "zona de teoría" como razones de ser para lo que se va a abordar a continuación. No obstante, la cantidad de contenidos que aborda en más pequeña, por ejemplo, no incluye la relación entre los ángulos inscritos y entre los inscritos y centrales. La relación de contenidos, campos de problemas, técnicas y tecnologías relativas a la geometría de la circunferencia en el orden de aparición en el texto sería la siguiente:

<table>
<tr><td>En la UD7. La circunferencia y el círculo.
Definición de circunferencia y elementos relacionados con ella.</td></tr>
<tr><td>Campos de problemas</td></tr>
<tr><td>
Ejercicios de reconocimiento e identificación.
En la "sección de problemas" se plantean actividades para profundizar en la comprensión de estos elementos. Por ejemplo: Un semicírculo se puede considerar como un sector circular y también como un segmento circular. Define semicírculo a partir de estas dos consideraciones".
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">En la UD7. La circunferencia y el círculo.
Longitud de la circunferencia y el número π</td></tr>
<tr><td colspan="2">Campos de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Ejercicios de cálculo de longitudes de arcos conociendo el ángulo y el radio.
• Ejercicios de cálculo de perímetros por descomposición en figuras, a partir de una imagen.
• Problemas verbales contextualizados relacionados con la longitud de la circunferencia.</td></tr>
<tr><td>Técnicas</td><td>Tecnologías</td></tr>
<tr><td>- Cálculo del perímetro de una circunferencia conociendo su radio y viceversa.
- Cálculo de longitudes de arcos conociendo el ángulo y el radio. A través del cálculo de la longitud del arco de 1º dividiendo la longitud entre 360º y multiplicando por el ángulo.
- Cálculo del radio de una circunferencia conociendo la longitud de un arco y el ángulo</td><td>- Planteamiento de un problema para buscar la manera de calcular la longitud de la circunferencia a partir de su diámetro. Estimación del número π.
- Proporcionalidad entre la amplitud del ángulo, la longitud del arco y el radio.
- Proporcionalidad entre la amplitud del ángulo, la longitud del arco y el radio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la UD7. La circunferencia y el círculo.
Los polígonos y la circunferencia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Campos de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Ejercicios de construcción de polígonos inscritos en circunferencias.
• Ejercicios de cálculo de apotemas y ángulos de polígonos inscritos en circunferencias.</td></tr>
<tr><td>Técnicas</td><td>Tecnologías</td></tr>
<tr><td>- Cálculo de apotemas y ángulos de polígonos inscritos en circunferencias.</td><td>- Basándose en la descomposición en triángulos isósceles.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la UD8. Área de figuras planas.
Área del círculo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Campos de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Ejercicios de cálculo de áreas de circunferencias conociendo el ángulo y el radio.
• Ejercicios de cálculo de áreas de sectores circulares conociendo el ángulo y el radio.
• Ejercicios de cálculo de segmentos circulares.
• Ejercicios de cálculo de áreas por descomposición en figuras, a partir de una imagen.
• Problemas verbales relacionando conceptos que se han visto sobre circunferencias.</td></tr>
<tr><td>Técnicas</td><td>Tecnologías</td></tr>
<tr><td>- Cálculo de áreas de círculos y sectores circulares.
- Cálculo de áreas de coronas circulares.</td><td>- Proporcionalidad entre la amplitud del ángulo, la longitud del arco y el radio.
- Descomposición en círculos.</td></tr>
</table>

En general, los libros de texto proponen los ejercicios y problemas interesantes una vez que se "ha explicado la teoría", por lo que las conclusiones que puedan sacar los alumnos están muy dirigidas a lo que se acaba de explicar, dando poco margen al descubrimiento y a poder establecer otras relaciones diferentes de las ya descritas en el libro. Sin embargo, se pueden encontrar actividades que inviten a la reflexión sobre lo que son las figuras y sus propiedades. Por otra parte, se presentan muchos ejercicios de cálculo, pero muy pocos de construcción.

Sin embargo, la labor del profesorado es utilizar los recursos que dispone, entre los que están los libros de texto y plantear la secuencia didáctica según considere sin seguir necesariamente el número de página del libro.

Por otro lado, no querría dejar de mencionar la importancia del desarrollo de las habilidades del pensamiento, así como aspectos metodológicos y de organización del aula. Aunque no es objeto de este TFM su fundamentación teórica, son aspectos de la enseñanza que también han sido trabajadas a lo largo de este Máster y que he tenido en cuenta a la hora de realizar la propuesta didáctica que este trabajo engloba.

2. Sobre los conocimientos previos y los contenidos

Sin pretender quitar valor a los conocimientos objetivos relativos a la geometría, que corresponderían a los enumerados en el currículo, la finalidad principal para la que se ha diseñado la presente propuesta didáctica está más centrada en alcanzar un cierto nivel de razonamiento geométrico. Por ello, los contenidos constituyen el soporte sobre el que se desarrollará ese razonamiento.

Es por esta razón por la que, para determinar los conocimientos previos iniciales y fijar los objetivos se ha acudido al modelo van Hiele.

Crowley (1987) y Malloy (2002) describen el modelo van Hiele como un modelo de desarrollo del pensamiento geométrico. Este modelo construye un marco teórico en el que se pueden enmarcar los procesos de desarrollo espacial y cognitivo de la geometría.

En él se describen cinco niveles que caracterizarían la forma de pensar en la que estarían los alumnos. El nivel en el que se encuentran los alumnos es mayor conforme más profunda y sofisticada sea su comprensión de las relaciones geométricas:

- Nivel 0: **Visual**. En este nivel los estudiantes identifican, nombran, comparan y operan con formas geométricas.
- Nivel 1: **Análisis**. En este nivel los estudiantes analizan los atributos de las formas y las relaciones entre los atributos y las formas. Son capaces de descubrir propiedades y reglas por observación.
- Nivel 2: **Deducción informal**. En este nivel descubren y formulan generalizaciones acerca de las propiedades y reglas aprendidas previamente y son capaces de desarrollar argumentos informales para demostrar que esas generalizaciones son correctas.
- Nivel 3: **Deducción**. Los estudiantes demuestran teoremas de forma deductiva y son capaces de comprender la estructura del sistema geométrico.
- Nivel 4: **Rigor**. Los estudiantes establecen teoremas y comparaciones en distintos sistemas axiomáticos y son capaces de analizar de forma deductiva y con rigor matemático.

En una situación ideal, los estudiantes desde Infantil hasta Bachillerato irían aprendiendo a razonar sobre geometría de forma progresiva. De esta manera, en infantil y hasta 2º de primaria se trabajaría en el nivel Visual, de 2º de primaria hasta 5º en el nivel de Análisis, de 5º de primaria hasta 2º de ESO en el nivel de Deducción informal y en los últimos cursos de ESO y Bachillerato en el nivel de Deducción, quedando el nivel de Rigor para ser desarrollado en determinados estudios universitarios.

Sin embargo, esto no siempre sucede así y en un curso como 1º ESO es posible encontrar alumnos en distintos niveles entre el 0 y el 2, y sólo unos pocos en nivel 3 o en condiciones de abordarlo.

El modelo van Hiele también propone una serie de fases a desarrollar en cada uno de los niveles para permitir el paso de un nivel de comprensión al siguiente. Estas fases son: recopilación de información, establecimiento de relaciones, explicación de las relaciones utilizando lenguaje geométrico, comprensión de las relaciones y síntesis de lo aprendido.

En este trabajo se parte de la hipótesis de que los alumnos tienen adquirido el nivel Visual (nivel 0) como mínimo y se tiene como objetivo el llegar al nivel de Deducción Informal (nivel 2). En consecuencia, se plantean actividades para adquirir progresivamente los niveles 1 y 2 de razonamiento geométrico definidos por van Hiele.

Los contenidos que se tratan en la propuesta y que se han seleccionado para servir de vehículo son:

- Concepto de circunferencia como lugar geométrico.
- Trazado de la mediatriz de un segmento.
- Elementos de una circunferencia.
- Posiciones relativas de recta y circunferencia y de dos circunferencias.
- Trazado de la bisectriz de un ángulo.
- Longitud de una circunferencia y su relación con el diámetro.
- Área encerrada en una circunferencia.
- Ángulos centrales y arcos. Relación entre ellos y con el radio.
- Ángulos inscritos.

- Relación entre los ángulos inscritos y centrales determinados por una misma cuerda.
- Polígonos inscritos en una circunferencias (triángulos y cuadriláteros).

Para abordar con cierta garantía estos contenidos propuestos, los conocimientos previos mínimos necesarios serían:

- Reconocimiento y trazado de una circunferencia y de algunos de sus elementos: radio, diámetro, longitud y área.
- Concepto de ángulo y su medida
- Clasificación de triángulos
- Identificación de paralelepípedos entre los cuadriláteros
- Identificación de polígonos regulares
- Diferencia entre perímetro y área.
- Unidades de medida de longitud y superficie.
- Cálculo del perímetro y del área de rectángulos y triángulos.
- Familiaridad con el uso del compás, regla numerada, escuadra y transportador de ángulos

De todas formas, independientemente del nivel de conocimientos previos, sí que es necesario que los alumnos tengan una madurez suficiente para ir adquiriendo con cierta facilidad otros nuevos y, sobre todo, niveles superiores de razonamiento.

El currículo aragonés para 6º de primaria (Orden 16 de Junio de 2014) incluye, en sus bloques 3 (Medida) y 4 (Geometría) tanto los conocimientos previos señalados como parte de los contenidos que se tratan en la propuesta didáctica.

No obstante, para poder tener una valoración más objetiva y como recordatorio se propone la realización de una pequeña prueba de conocimientos previos que se realizaría y corregiría en clase como sesión 0 de esta propuesta didáctica.

La prueba de conocimientos que se propone, se adjunta como anexo del presente TFM y consta de 4 ejercicios: los tres primeros están pensados para comprobar que se alcanza el nivel mínimo de conocimientos y comprobar la destreza en el uso de instrumentos necesarios para el trabajo de la geometría. El cuarto ejercicio, mucho más abierto, pretende además medir el grado de razonamiento geométrico. Un estudiante con un nivel 0, se quedaría en decir si se trata de un triángulo o de un cuadrilátero. Con un nivel 1 se esperaría una clasificación en función de sus lados y/o ángulos y, posiblemente, alguna propiedad más como simetrías, regularidades, paralelismos…

La corrección de los ejercicios en clase es una actividad que hay que realizar necesariamente. La realización de pruebas escritas de evaluación, tanto si van a contar para la calificación como si no, supone un esfuerzo realizado por los alumnos y alumnas al que hay que sacarle el máximo partido. Independientemente de que hayan salido mejor, o peor, la mayor parte de los estudiantes han dedicado tiempo y esfuerzo en resolver los ejercicios, por lo que a la hora de corregirlos el interés y la facilidad en seguir las explicaciones es mucho mayor que con otras tareas que ni siquiera han intentado realizar.

Respecto a la medida de los ángulos, a la hora de corregir el primer ejercicio, podría ser conveniente hablar del origen astronómico del convenio de la medida del ángulo. Se podría explicar que la división de la circunferencia en 360 partes iguales para obtener la unidad en la que medimos la amplitud de un ángulo esta asociada al cambio de posición aparente de cada estrella cada día, de manera que al cabo de un año (aproximadamente), la estrella completa una “órbita” y vuelve a estar en su posición inicial (Martínez y Juan, 1989).

Si se estimara necesario, se entregaría una hoja de ejercicios de refuerzo y/o recordatorio. Una relación de ejercicios que podrían proponerse se adjunta como anexo del presente TFM.

3. Razón de ser del objeto matemático

La razón de ser de un objeto matemático es un problema o una situación que justifica la introducción de dicho objeto.

En este TFM, se proponen tres problemas o situaciones como razones de ser para abordar la enseñanza de sendos objetos matemáticos asociados al círculo.

1. La circunferencia como lugar geométrico

El primer problema tiene como objeto la comprensión por parte de los alumnos de lo que es una circunferencia como lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro, que es su centro.

El problema consiste en determinar la zona en la que podemos colocar unos enchufes, teniendo en cuenta que tienen que estar a un metro, como mínimo, de cualquier toma de agua.

2. Proporcionalidad entre la longitud y el diámetro de una circunferencia. El número π

La historia nos enseña que en muchas ocasiones, la necesidad de resolver un problema es la que ha propiciado o forzado la creación de una técnica o el descubrimiento de una relación para conseguir resolverlo.

Dado que, una vez establecido un punto central, una circunferencia viene determinada por una única variable independiente, que es su radio (o su diámetro), parece evidente que, conocido el radio, seamos capaces de determinar otras medidas relativas a una circunferencia, como son su longitud y superficie encerrada.

Identificar que el tipo de relación que guarda la longitud de una circunferencia con su diámetro es de proporcionalidad directa, así como determinar la constante de proporcionalidad es uno de los problemas que ha interesado resolver desde la antigüedad.

Según Pritchard, C. (2003) se sabe que la denominada genéricamente civilización babilónica que se desarrolló a partir del 5000 a.C. calculaba la longitud de una circunferencia triplicando su diámetro. Un papiro egipcio datado en el 1650 a.C. sugiere que para cuadrar el círculo, esto es, para obtener su área en relación con la de un cuadrado equivalente, hay que tomar como lado del cuadrado el diámetro del círculo disminuido en un noveno del mismo. Esta aproximación resulta en un valor para la razón entre la circunferencia y su diámetro de 3'16.

La situación propuesta en este trabajo con el fin de abordar la proporcionalidad entre longitud y diámetro, es el planteamiento de la siguiente hipótesis: Si tengo una circunferencia de diámetro doble que otra, ¿será también doble su longitud? Para corroborar o refutar esta hipótesis se plantea la realización de un experimento que nos llevará a la conclusión de que ambas medidas son proporcionales y a calcular una aproximación de esa constante de proporcionalidad que las relaciona.

Como una primera aproximación al número π, recurriremos nuevamente a la historia para utilizar la aproximación de Arquímedes: $\pi \approx \frac{22}{7}$. De esta manera, el experimento que se propone en este trabajo irá encaminado a obtener este valor para el número π.

A raíz de este descubrimiento, se proponen nuevas hipótesis y actividades para relacionar el radio con el área encerrada en la circunferencia.

3. Ángulos en una circunferencia

¿Quién no ha ido alguna vez al cine y ha tenido que sentarse tan cerca de la pantalla que se es incapaz de verla de extremo a extremo sin mover los ojos, o incluso la cabeza?

Se plantea el siguiente problema: Suponiendo que el ojo humano tiene un campo visual central de 90º qué asientos en una sala de cine no permitirían ver la pantalla con nitidez.

¿Y si una persona sólo tuviera una amplitud del campo visual central de 60º? ¿Cuáles serían los asientos que no debería utilizar? ¿Y si la amplitud del campo visual central fuera de 120º?

Aunque el ojo humano tiene una amplitud mucho mayor que 90º, incluso contando sólo la zona central, en la que se ve con enfoque, me ha parecido más sencillo empezar con un ángulo de 90º, ya que facilita mucho la construcción.

A raíz de este problema y de uno similar sobre focos para iluminar una parte de un escenario de teatro, se pretende que los estudiantes tengan la oportunidad de descubrir las propiedades y relaciones de los ángulos inscritos y centrales en una circunferencia.

4. Propuesta didáctica

La secuencia didáctica que se propone está diseñada para una duración de 13 sesiones.

4.1 Campos de problemas, técnicas y tecnologías

Sesiones 1, 2, 3, 4 y 5

Campo de problemas: Los problemas propuestos para estas sesiones son problemas relacionados con el concepto de circunferencia y las relaciones que existen entre sus medidas más elementales como son el radio, el diámetro, la longitud y el área encerrada.

Técnicas:

- Trazado de la mediatriz de un segmento
- Cálculo de la longitud de una circunferencia
- Cálculo del área de una circunferencia
- Cálculo de longitudes de arcos de circunferencias por descomposición
- Cálculo de áreas de sectores circulares por descomposición

Tecnologías:

- Concepto de circunferencia
- Proporcionalidad entre la longitud de la circunferencia y su radio
- Proporcionalidad entre el área encerrada en una circunferencia y el cuadrado de su radio
- Conservación del perímetro: si descomponemos el perímetro de una figura en tramos más sencillos de calcular, el perímetro de la figura compuesta es igual a la suma de los tramos.
- Conservación del área: si descomponemos una figura en otras más sencillas, el área de la figura compuesta es igual a la suma de las áreas de las figuras sencillas.

Sesiones 6, 7, 8, 9 y 10

Campo de problemas: Los problemas propuestos para estas sesiones tienen como objetivo trabajar los arcos, ángulos centrales e inscritos en una circunferencia y aplicación de las relaciones encontradas en triángulos y cuadriláteros inscritos en circunferencias.

Técnicas:

- Cálculo de la longitud de un arco conociendo el radio y el ángulo central que lo abarca.
- Cálculo del radio de una circunferencia conociendo la longitud del arco y el ángulo central.
- Cálculo de un ángulo central conociendo la longitud del arco y el radio.
- Trazado del centro de una circunferencia que pase por tres puntos no alineados.
- Cálculo del valor de ángulos inscritos conociendo el central correspondiente y viceversa, cuando los ángulos inscritos son menores o iguales a 90º.
- Cálculo del valor de ángulos inscritos conociendo el central correspondiente y viceversa, cuando los ángulos inscritos son mayores de 90º.
- Cálculo del valor de ángulos inscritos en un arco conociendo el de los ángulos inscritos en el otro arco que determina una misma cuerda.
- Trazado de la circunferencia circunscrita a un triángulo.
- Trazado de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia.
- Trazado de un cuadrado inscrito en una circunferencia.

Tecnologías:

- Proporcionalidad entre el radio, la longitud del arco y la amplitud del ángulo central.
- Definición de circunferencia.
- Igualdad de los ángulos inscritos determinados por un mismo arco.
- Relación entre ángulos inscritos y central.

Sesiones 11, 12 y 13

Repaso y prueba escrita de evaluación.

4.2 Metodología y organización del aula

La propuesta que se presenta está pensada para que pueda ponerse en práctica casi con cualquier organización de la clase (en grupo, individual, en parejas…). Hay dos excepciones:

- En la sesión 3 se propone realizar un experimento por grupos. Un número adecuado de estudiantes por grupo podría ser cuatro.
- En las sesiones 5 y 10 se propone una organización en Grupos Interactivos, en los que los grupos de estudiantes trabajan con la presencia de un voluntario o voluntaria, cuya misión es dinamizar y asegurarse de que todos los miembros del grupo participan y realizan la tarea. Una breve descripción de la dinámica de los Grupos Interactivos, así como las hojas que se entregarían a los voluntarios con las soluciones, se adjunta como anexo al presente TFM.

Respecto a los recursos materiales necesarios, sería conveniente que el aula contara con una pizarra digital o un proyector. Muchas de las actividades que se presentan se pueden realizar en el aula utilizando aplicaciones informáticas como GeoGebra o una hoja de cálculo, pero no es estrictamente necesario. Por esta razón, se ha preparado un dossier a modo de portfolio para que los estudiantes puedan realizar las actividades sobre él. Este portfolio tiene como objetivos facilitar la realización de las actividades, organizar la información a los estudiantes para su estudio y es, en sí mismo, objeto de evaluación.

Los materiales marcados con el símbolo de GeoGebra están accesibles como recursos en la URL: http://ggbm.at/BsUnUXEs. El objetivo es doble: servir como guía para que los estudiantes realicen las actividades con esta aplicación o, sencillamente, facilitar las explicaciones del docente proyectando sobre la pizarra digital.

Excepto en las 3 sesiones especialmente dedicadas al trabajo en grupo, esta propuesta está diseñada para que la dinámica de la clase combine trabajo individual, discusiones en grupo e institucionalizaciones por parte del docente o de los alumnos.

La labor del profesor o profesora estaría más centrada en lanzar preguntas y conducir las reflexiones colectivas que en dar soluciones e institucionalizar los conceptos y relaciones que se abordan.

La dinámica podría ser la siguiente:

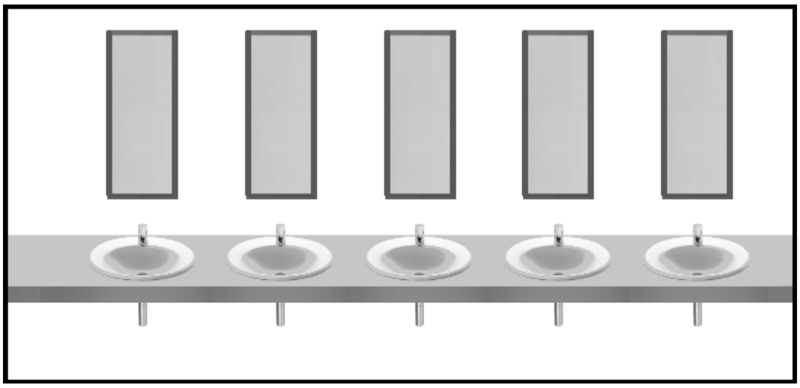
- Partimos de un problema inicial a resolver.
- Hay un tiempo inicial de reflexión individual o en parejas.
- Los estudiantes tienen la información básica en su portfolio para ir realizando las actividades.
- El docente estará pendiente del nivel de actividad e irá planteando cuestiones para invitar a la reflexión y a la participación. El material desarrollado en GeoGebra puede servir de soporte para ayudar a dar explicaciones y/o corregir las actividades.
- Se procurará, siempre que sea posible, que los estudiantes sean los que verbalicen e institucionalicen las conclusiones a las que se llega.

4.3 Secuencia didáctica

Sesión 1. ¿Qué es una circunferencia?

Problema. Distancia de seguridad.

En la siguiente pared de un lavabo público, se quieren colocar enchufes sin estropear los espejos. La distancia mínima que tiene que haber entre un grifo y un enchufe es de un metro. Colorea la zona en la que podremos colocar enchufes sabiendo que los grifos de los lavabos están separados 1m entre sí.



- ¿Qué condición cumplen todos los puntos que pertenecen a la circunferencia?

- ¿Qué condición cumplen todos los puntos que están en la parte exterior de la circunferencia?

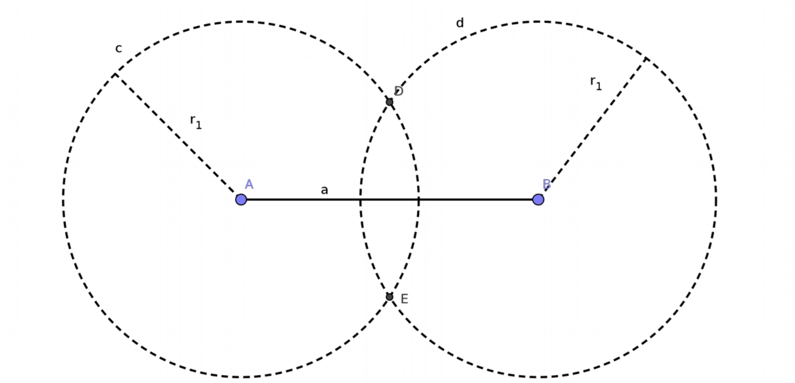
- ¿Qué condición cumplen todos los puntos que están en la parte interior a la circunferencia?

Basándote en estas observaciones, explica con tus palabras qué es una circunferencia.

Aplicación: Trazado de la mediatriz de un segmento

Podemos definir mediatriz de un segmento como la recta perpendicular al segmento por su punto medio. Sin embargo, cuando queremos trazar una mediatriz, no lo hacemos basándonos en esta definición. Lo que hacemos es buscar, con ayuda de un compás, los puntos que estén a la misma distancia de los dos extremos. Por eso tomamos una medida con el compás que sea mayor o igual a la mitad del segmento, lo colocamos en un extremo y trazamos una circunferencia; luego colocamos el compás en el otro extremo manteniendo la apertura y trazamos otra circunferencia. Uniendo los puntos donde se cortan con una recta obtenemos la mediatriz.

Observando este dibujo:

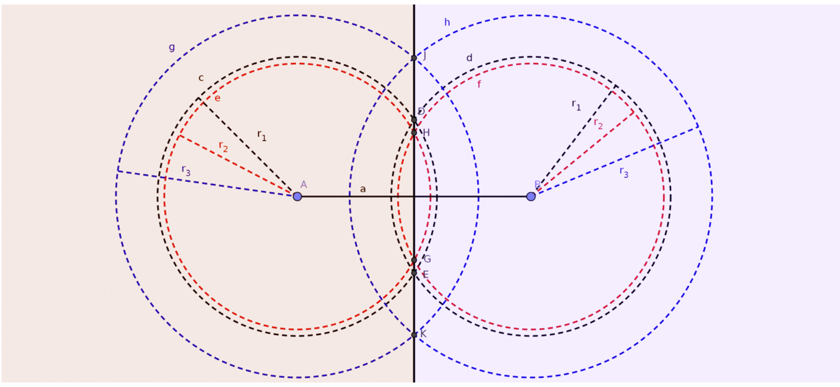


- ¿Qué condición cumplen todos los puntos de la circunferencia *c*?

- ¿Qué condición cumplen todos los puntos de la circunferencia *d*?

- ¿Qué condición cumplen los puntos *E* y *D*?

Traza más circunferencias desde los dos extremos con radios distintos:



- ¿Qué condición cumplen los puntos *J, D, H, G, E* y *K*?

Si unimos todos estos puntos (y todos los posibles que pudiéramos encontrar repitiendo este proceso), ¿Qué construcción se forma? Vemos que todos los puntos están alineados y la recta resultante es la mediatriz del segmento *a*.

- ¿Qué condición cumplen todos los puntos que están en la mediatriz del segmento *a*?

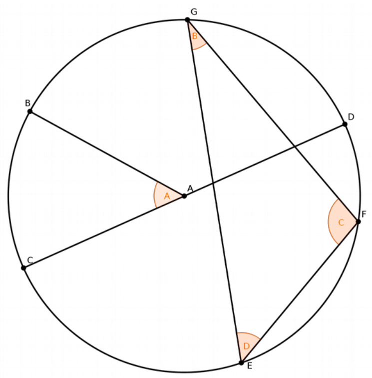
- ¿Y los que no pertenecen a la recta? ¿Qué podemos decir de los puntos que estén a la izquierda de la mediatriz? ¿Y de los que están a la derecha?

Basándote en cómo la trazamos, escribe con tus palabras una definición mediatriz de un segmento *a* cuyos extremos son dos puntos *A* y *B*.

Sesión 2. Relación entre los elementos de una circunferencia

Identifica en el dibujo los siguientes elementos:

Radio	Cuerda	Centro	Ángulo inscrito	Área del círculo
Diámetro	Arco	Ángulo central	Longitud de la circunferencia	Sector circular



- ¿Qué relación guardan entre sí el radio y el diámetro de una circunferencia?

- Si nos fijamos en una cuerda, ¿qué ocurriría si pasara por el centro de la circunferencia?

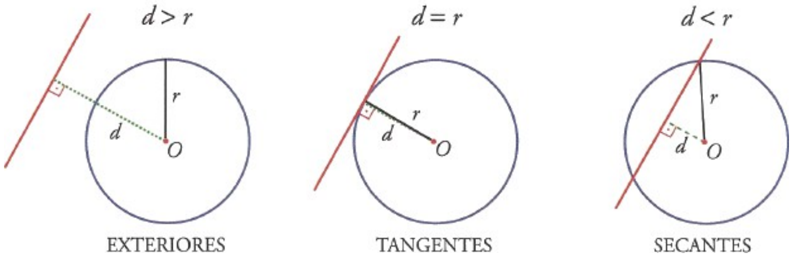
- Si nos fijamos en el ángulo central Â, qué ocurriría si desplazamos el punto B en el sentido de las agujas del reloj hasta llegar al punto D, ¿qué amplitud en grados tendría Â? Y si lo seguimos moviendo en el mismo sentido hasta que coincida con C, ¿qué amplitud en grados tendría Â?

- Vamos a tomar una cuerda cualquiera de una circunferencia y vamos a trazar su mediatriz. ¿Qué ocurre?

- Dibuja por lo menos 3 cuerdas en una circunferencia y traza las mediatrices de todas ellas. ¿En qué punto se cortan todas las mediatrices?

Dibuja el ángulo central que define una de las cuerdas. Dobla la hoja por la mediatriz de la cuerda. ¿Qué ocurre con el ángulo? ¿Cómo son los ángulos en los que la mediatriz divide el ángulo central?

Posiciones relativas de recta y circunferencia



Extraído de Colera, J. y Gaztelu, I. (2011)

Teniendo en cuenta que hemos llamado *d* a la distancia de O a la recta, explica con tus palabras, cuándo decimos que:

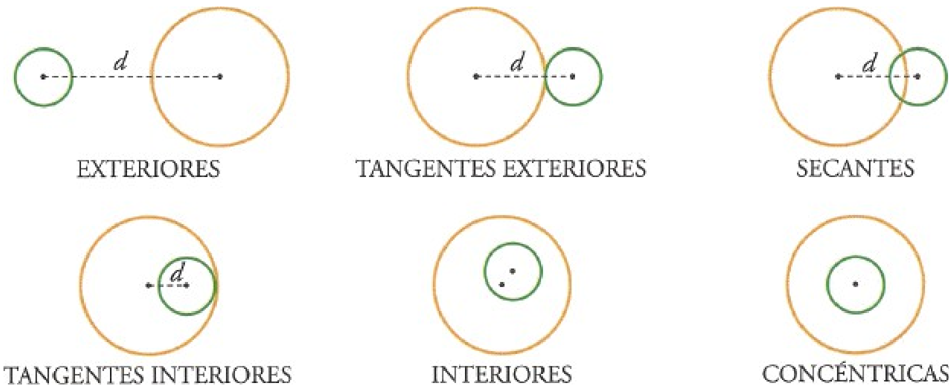
- una recta y una circunferencia son exteriores

- una recta y una circunferencia son tangentes

- una recta y una circunferencia son secantes

Observa que las distancias entre puntos y rectas se miden, por definición, tomando la distancia entre el punto y el punto de la recta más cercano a él. Es por esta razón que las distancias entre puntos y rectas se miden siempre sobre la perpendicular a la recta dada que pase por el punto.

Posiciones relativas de dos circunferencias



Extraído de Colera, J. y Gaztelu, I. (2011)

Explica con tus palabras, cuándo decimos que (Ahora hemos llamado *d* a la distancia entre los dos centros de las circunferencias):

- dos circunferencias son exteriores

- dos circunferencias son tangentes exteriores

- dos circunferencias son secantes

- dos circunferencias son tangentes interiores

- dos circunferencias son interiores

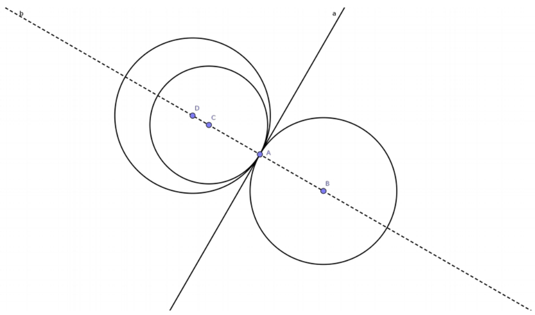
- dos circunferencias son concéntricas

Pregunta: ¿Puede ser una recta interior a una circunferencia?

Ejercicio. Tangentes

Dibuja 3 circunferencias que sean:

- Tangentes a la recta que está dibujada
- Al menos una de ellas tiene que ser tangente interior a otra
- Al menos dos de ellas tienen que ser tangentes exteriores



Aplicación: Trazado de la bisectriz de un ángulo

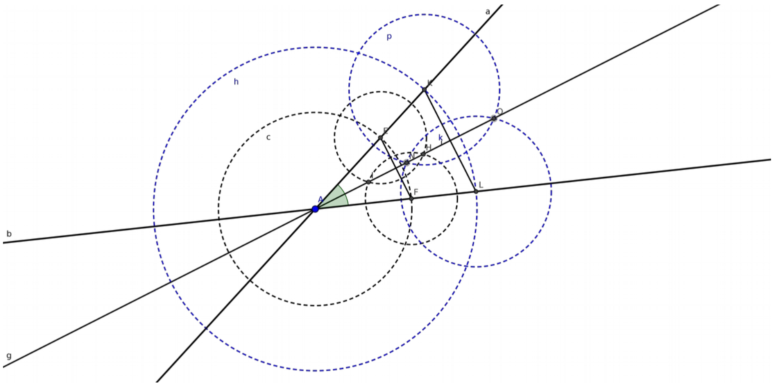
La bisectriz de un ángulo es la semirrecta, con origen en el vértice del ángulo, que lo divide en dos ángulos iguales. Para trazar la bisectriz de un ángulo podemos realizar una construcción en la que el angulo sea ángulo central de una circunferencia.

- Trazamos una circunferencia con el radio que queramos, y con centro en el vértice del ángulo. Los lados del ángulo cortan a la circunferencia en dos puntos.

- La mediatriz de la cuerda que define estos dos puntos será la bisectriz del ángulo.

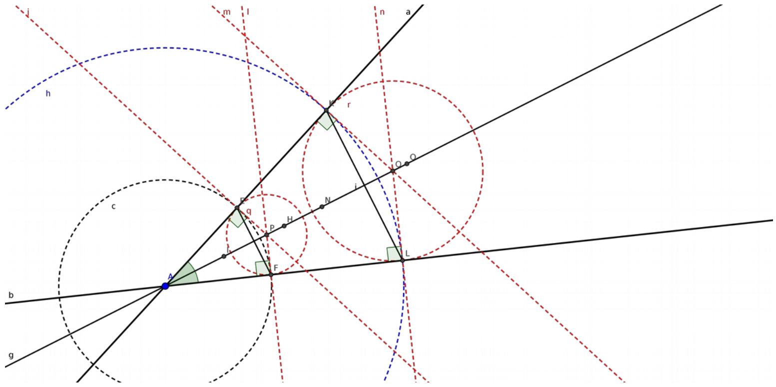
- ¿Obtendremos el mismo resultado tomando una longitud diferente para el radio? Traza otra circunferencia de radio distinto al que has utilizado para trazar la bisectriz y traza la mediatriz de la nueva cuerda resultante.

- ¿El punto de corte de la bisectriz con el arco del ángulo central será el punto medio del arco?



Posible ampliación

- La bisectriz de un ángulo también es la semirrecta en la que se encuentran todos los puntos que están a la misma distancia de las dos semirrectas que conforman sus lados. ¿Cómo podemos comprobar esta propiedad? Acuérdate de cómo se miden las distancias de los puntos a las rectas.



- Si quisiéramos dividir un ángulo entre 4, ¿cómo lo haríamos?:

a) ¿Dividir en cuatro partes la cuerda que resulta al unir los puntos de corte de los lados del ángulo con una circunferencia con centro en el vértice, y luego trazar las semirrectas que unen el vértice con los puntos intermedios?

b) ¿Trazar la mediatriz de la cuerda que resulta al unir los puntos de corte de los lados del ángulo con una circunferencia con centro en el vértice. La mediatriz, junto con los lados del ángulo forman dos ángulos iguales, trazo dos nuevas cuerdas uniendo los puntos de corte iniciales con el punto de corte de la mediatriz con la circunferencia y dibujo las mediatrices de las nuevas cuerdas?

Seguimos razonando.

Si queremos trazar una circunferencia, una vez determinado qué punto va a ser su centro, ¿qué necesitamos saber para poderla dibujar?

- Entonces, ¿es suficiente conocer cuánto mide el radio de una circunferencia poder pintarla? ¿Todas las circunferencias que tracemos con el mismo radio van a ser iguales? ¿Tendrán la misma longitud?

En ese caso, nos podemos preguntar por la relación que hay entre la longitud de una circunferencia y su radio o, si nos remontamos a la antigua Grecia, podemos preguntarnos por la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro ya que si una medida es proporcional al diámetro, también lo va a ser al radio.

Para poder averiguarlo vamos a diseñar un experimento que nos ayude a establecer esas relaciones. Lo primero que necesitamos es plantearnos una pregunta y formular una hipótesis con la respuesta a la pregunta que esperamos que se obtenga del experimento.

Se podría partir de la pregunta: ¿La longitud de una circunferencia será el doble de la de otra circunferencia cuyo diámetro sea la mitad? Es decir, ¿a doble diámetro le corresponde doble longitud? ¿Y si fuera triple?

Hipótesis: Una circunferencia que tenga el diámetro doble de largo que la de otra circunferencia, su longitud también será el doble. Y si su diámetro es el triple, su longitud también será el triple.

Diseño del experimento (Martínez y Juan, 1989)

En esta sesión se realizaría sólo el diseño del experimento, pero es importante que los estudiantes entiendan qué se quiere medir, por qué y cuál va a ser el procedimiento.

- Tomamos tres objetos circulares de diámetros diferentes de manera que el Objeto 1 sea el más pequeño, el Objeto 2 tenga un diámetro doble que el Objeto 1 y el diámetro del Objeto 3 sea el triple del diámetro del Objeto 1.

- Partiendo de una misma línea de salida, avanzarán paralelamente en línea recta haciendo rodar las tres ruedas sobre una tira de cinta de carrocero que habremos pegado previamente en el suelo.

- Cada vez que una de éstas completa una vuelta, se marcará en la cinta.

- Teniendo en cuenta nuestra hipótesis y las proporciones entre los diámetros de los objetos, ¿cuántas vueltas tendrá que dar el objeto 1 y cuántas el objeto 2 para coincidir a la hora de hacer una marca? ¿cuántas para que coincidan el objeto 1 y 3? ¿y cuántas para el 2 y el 3? Realizamos una tabla con los valores esperados.

Sesión 3. El número π

Realización del experimento planteado la sesión anterior.

Si es necesario hacer más de tres grupos, se pueden llevar objetos de diámetros que guarden otras proporciones, por ejemplo: Objeto 4 con un diámetro 3/2 del Objeto1, Objeto 5 con un diámetro de 5/2 del diámetro del Objeto 1,...

Una vez probada la hipótesis para las proporciones planteadas (doble y triple), será necesario hacer una reflexión para generalizar el resultado. ¿Podríamos decir que la longitud de una circunferencia será tantas veces más grande que la longitud de otra circunferencia como veces sea su diámetro?

Dado que la disposición del aula estará preparada para seguir experimentando, podemos plantearnos el calcular/medir la constante de proporcionalidad que relacione la longitud de una circunferencia con su diámetro.

Para acercarnos a la aproximación de Arquímedes: $\pi \simeq 3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$, en cada una de las cintas de carrocero (asociada a cada objeto) haremos marcas espaciadas un diámetro entre sí. Realizaremos, al menos 23 marcas, la primera marcará el inicio del movimiento y corresponderá con la marca 0. Al hacer circular la circunferencia por la cinta, cuando lleguemos a la marca del diámetro 22, tendremos que haber dado, aproximadamente, 7 vueltas.

Al realizarlo con distintos tamaños de circunferencias nos tiene que llevar a la conclusión de que siempre se guarda una proporción entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, y que esa proporción es similar a 22/7.

- Si repitiéramos el experimento con una cinta muchísimo más larga, en la que siguiéramos haciendo marcas a una distancia de un diámetro, ¿llegaríamos en algún momento a hacer coincidir exactamente la marca del diámetro con la marca hecha al objeto?

El paso final sería la institucionalización de la fórmula que permite calcular la longitud de la circunferencia en función de su diámetro y, si así se desea, también de su radio:

$$L=\pi\cdot d=\pi\cdot 2\cdot r$$

Sesión 4. El área del círculo

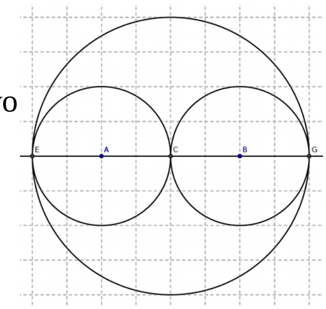
Ya hemos visto que la relación entre el radio, el diámetro y la longitud de una circunferencia es de proporcionalidad, ¿y el área? Dos circunferencias trazadas con el mismo radio encierran la misma área porque si las recortamos, podemos superponerlas y ver que son iguales. Por lo tanto, el área encerrada en el interior de la circunferencia también va a depender únicamente de la longitud de su radio.

Respecto al área nos podemos preguntar: ¿el área encerrada en una circunferencia será el doble de la de otra de radio la mitad? O lo que es lo mismo, ¿la suma de las áreas de dos círculos iguales es igual al área de un círculo de radio doble?

Tanto si la hipótesis que se decida formular en el aula suponga que las respuestas a las preguntas anteriores son afirmativas, como si son negativas, propondremos a los estudiantes realizar el siguiente dibujo:

- Dibuja dos circunferencias iguales que sean tangentes externas

- Con centro en el punto de tangencia, dibuja una circunferencia cuyo radio sea el diámetro de cualquiera de las dos pequeñas

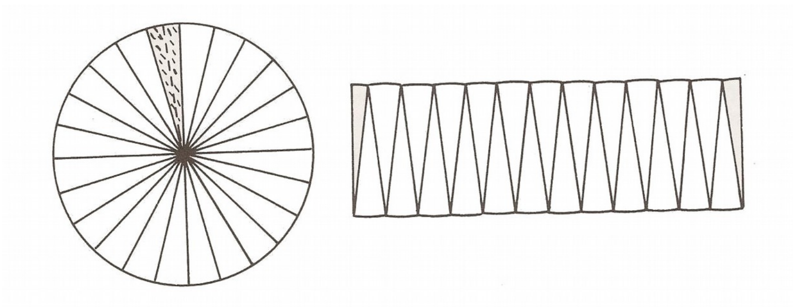


- Las dos circunferencias pequeñas son tangentes interiores a la grande que acabamos de trazar.

- ¿Qué relación hay entre el radio de la circunferencia grande y el de las pequeñas?

Esta figura contradice (o afirma) la hipótesis que se haya planteado ya que una circunferencia de radio doble encierra más del doble de superficie. Pero entonces, si la relación entre ambas magnitudes no es proporcional, ¿qué tipo de relación guardan?

Dividimos un círculo en muchos sectores iguales y los colocamos como se indica en la figura. En este dibujo hemos dividido el círculo en 24.



Al colocar los sectores encajados, la figura que forman se parece mucho a un rectángulo. La suma de los arcos de abajo (o la de los de arriba) es una semicircunferencia, es decir, valen **π**. ¿Por qué?

Imagina ahora que dividiéramos un círculo en muchos, muchísimos, sectores iguales. ¿Cómo serían entonces los arcos? Casi como puntos, ¿verdad?. La figura obtenida sería casi idéntica a un rectángulo de $\pi \cdot r$ de largo y r de ancho. Con muy buena aproximación, obtendrías un rectángulo equivalente al círculo dado. Por eso, cuando tenemos que calcular el área de un círculo empleamos la siguiente fórmula: $A=\pi \cdot r^2$

Y podemos ver que el área de un círculo es proporcional al cuadrado del radio, y que esa constante de proporcionalidad es **π**.

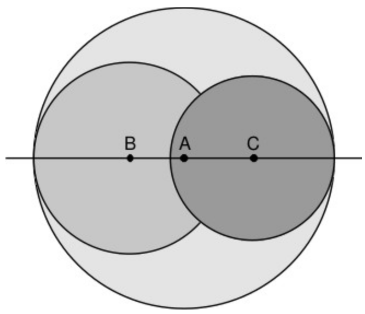
Sesión 5. Consolidación

Dinámica de grupos interactivos

MESA - A

Ejercicio 1. Círculos con centros alineados. (AQA, 2008)

Los tres círculos de la figura se solapan como se muestra en el dibujo y sus centros están en la misma línea recta.



El punto *A* es el centro del círculo mayor.

El punto *B* es el centro del círculo mediano.

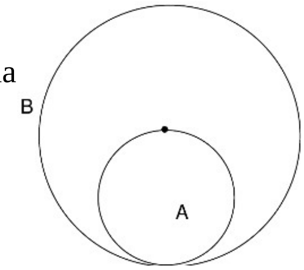
El punto *C* es el centro del círculo menor.

Los diámetros de los círculos son: 22cm, 16cm y 13cm.

Calcula la longitud de los segmentos *BA* y *AC*

Ejercicio 2. Círculo interior. (AQA, 2008)

La circunferencia del círculo A es tangente interior a la circunferencia del círculo B y pasa por su centro.



El área del círculo A es de 100cm² .

¿Cuál es el área del círculo B?

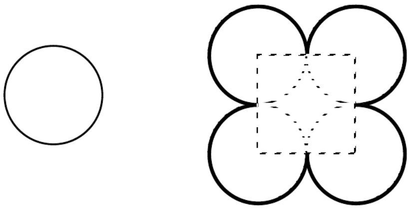
MESA -B

Ejercicio 1. Perímetro y Área. (AQA, 2008)

La longitud de esta circunferencia es de 24 cm.

Colocamos cuatro circunferencias como ésta formando la figura que se ve en el dibujo.

Los centros de las circunferencias son los vértices de un cuadrado.



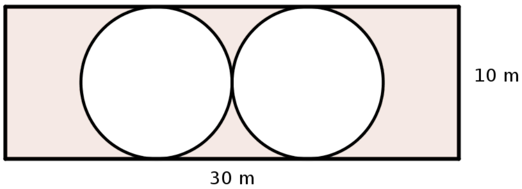
¿Cuánto mide el perímetro de la figura que forman?

¿Y el área? (Se incluye todo lo que está encerrado en el perímetro)

MESA – C

Ejercicio 1. Fuentes circulares

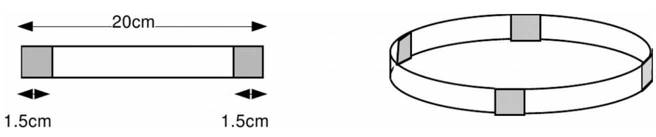
En un terreno rectangular se construyen dos fuentes circulares, como se muestra en la figura, y se planta césped en el terreno restante. ¿Qué superficie ocupa el césped?



Ejercicio 2. Aro de papel

La longitud de la tira de papel es de 20 cm y tiene 1.5 cm de zona adhesiva en cada extremo.

Pegamos 4 tiras de papel de manera que las zonas adhesivas se solapen perfectamente para construir un aro de papel.



Calcula la longitud del aro.

Calcula el diámetro de la circunferencia más grande que podríamos hacer con este aro.

Sesión 6. Ángulos y arcos

Problema. Diseño de una pista de atletismo cubierta.

El planteamiento que se hace del problema es una versión simplificada del planteado por Ibánez, R. (2014). He elegido que la pista a diseñar sea cubierta porque en caso de que se quiera realizar un dibujo a escala de la pista en papel o utilizando alguna herramienta informática como GeoGebra durante el proceso de resolución del problema, o a posteriori, es más sencillo.

Las dimensiones que se proponen para la pista cubierta están sacadas de la web del Consejo Superior de Deportes (ver referencias), aunque se han simplificado para no añadir complejidad al problema. Este problema es bastante indicado para trabajar con hojas de cálculo.

En una instalación deportiva hay una pista de atletismo cubierta que tiene las siguientes características:

- La línea interior tiene, en total, una longitud de 200m

- Tiene 4 calles y cada calle tiene una anchura de 1m

- La pista está formada por dos partes rectas de 38m cada una y dos partes curvas iguales, que son semicircunferencias.

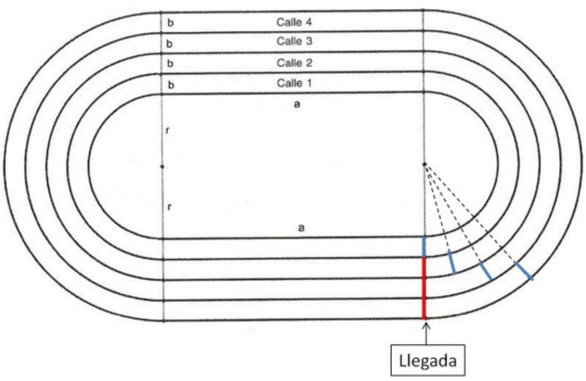


Figura obtenida de: http://culturacientifica.com/2014/08/27/pi-atleta/

En este dibujo, la salida para la carrera de 200m para cada una de las calles está marcada con una línea verde y la llegada con una roja (excepto para la calle 1, que coincide la línea de salida con la de llegada).

Para que todos los corredores recorran la misma distancia, calcula la posición en la que tendríamos que pintar las líneas de salida de las calles 2, 3 y 4.

Dinámica

Se trata de un problema que les puede abrumar a primera vista, aunque conocen las herramientas necesarias para poderlo resolver.

Para ir desbloqueando, en caso de que sea necesario, se pueden ir dando las siguientes indicaciones:

a) Sobre este dibujo de la pista de atletismo y coloca las medidas que ya conoces

b) ¿Cuál será el radio de las semicircunferencias interiores de la calle 1?

c) ¿Cuál será el radio de cada una de las demás semicircunferencias?

d) ¿Cuánto miden las líneas interiores de cada una de las calles contando los trozos rectos y curvos?

e) Vamos a mantener los datos organizados:

Quizá nos venga bien ir organizándonos los datos que vamos encontrando en una tabla.

En ella podemos ir anotando los valores que vayamos conociendo e ir añadiendo columnas con los que veamos que necesitamos calcular.

También puede ser útil ir indicando en el dibujo las medidas que vas conociendo y el nombre que has dado a cada una de ellas.

e) ¿Cuántos metros tenemos que adelantar la salida en cada una de las calles tomando como referencia la meta? (¿Por qué elijo la meta como referencia?)

	Radio interior	Longitud de la línea interior	Distancia de la salida (desde meta)
Calle 1	$r_1=\frac{124}{2\cdot\pi}=19{,}735\,m$	$l_1=200\,m$	$d_1=l_1-200=0\,m$
Calle 2	$r_2=20{,}735\,m$	$l_2=200+2\pi=206{,}284\,m$	$d_2=l_2-200=6{,}284\,m$
Calle 3	$r_3=21{,}735\,m$	$l_3=200+2\cdot 2\pi=212{,}5664\,m$	$d_3=l_3-200=12{,}5664\,m$
Calle 4	$r_4=22{,}735\,m$	$l_4=200+3\cdot 2\pi=225{,}133\,m$	$d_4=l_4-200=25{,}133\,m$

El personal que tiene que pintar las líneas de salida no tiene ningún aparato que permita medir distancias sobre líneas curvas. Sin embargo, sí que pueden medir ángulos. Vamos a dar la información de otra manera.

g) ¿Qué tipo de relación hay entre un arco, el ángulo que lo define y el radio de una circunferencia? ¿Cómo calcularíamos el ángulo que define un arco de longitud dada en una circunferencia?

f) Si nos fijamos en la calle 2, ¿Qué ángulo respecto a la línea de meta nos definirá un arco sobre su curva interior que mida los 6,284 m que hemos calculado? ¿Qué conocemos de una circunferencia para que podamos establecer una relación de proporcionalidad o una regla de tres?

g) Repetimos el proceso con la calle 3. ¿Puedes encontrar algún tipo de patrón que nos facilite los cálculos para las calle 4? Comprueba que es correcto.

Posibles ampliaciones:

- *¿Y si tuviéramos que diseñar una pista de atletismo exterior que tuviera las siguientes características?:*

- *La línea interior tiene, en total, una longitud de 400m*
- *Tiene 4 calles y cada calle tiene una anchura de 2m*
- *La pista está formada por dos partes rectas de 76m cada una y dos partes curvas iguales, que son semicircunferencias.*

¿En qué cambiaría el problema?

Generalización de resultados.

Hemos visto cómo podemos calcular la amplitud de un ángulo central en una circunferencia conociendo la longitud del arco que define y el radio de la circunferencia.

- ¿Podrías escribir una fórmula que los relacione y que nos sirva para realizar este cálculo en cualquier circunferencia?

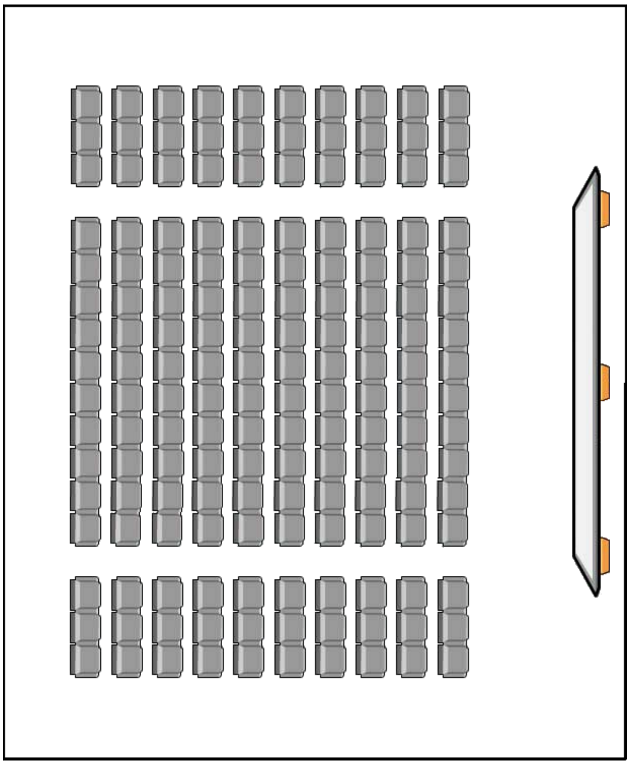
- Y si conociéramos la amplitud del ángulo y el radio, ¿cómo calcularías la longitud del arco?

- Y, por último, si lo que conociéramos fuese el ángulo y la longitud del arco, ¿podríamos saber cuál es el radio de la circunferencia?

Sesión 7. Ángulos inscritos

Problema. Sala de cine.

En una sala de cine se han dado cuenta de que hay unas cuantas butacas en las que no podemos ver con nitidez toda la pantalla de vez. Suponiendo que para tener una vista enfocada, el ángulo de visión central del ser humano es de 90º. Marca las butacas que se deberían quitar.



Para resolverlo, vamos a seguir los siguientes pasos:

- Con una hoja de papel vegetal, utilizando la esquina de 90º, recorta un triángulo rectángulo aproximadamente isósceles que tenga de cateto por lo menos 15cm. Ve colocando el triángulo encima del dibujo de manera que formes distintos triángulos rectángulos teniendo todos ellos la pantalla como hipotenusa. Marca con un punto el lugar del vértice del ángulo recto. Si una persona se sentara en los sitios donde has marcado los puntos, ¿Con qué amplitud de ángulo vería la pantalla completa?.

- Trazando muchos puntos, si los unimos entre sí, ¿qué forman?

- ¿Qué ocurre con los asientos que están en el interior la línea que hemos trazado uniendo los puntos y la pantalla? ¿Y con los que están fuera? ¿Cómo será el ángulo de visión necesario en ambos supuestos?

Parece que la figura que hemos trazado uniendo los puntos es un arco de circunferencia. En ese caso:

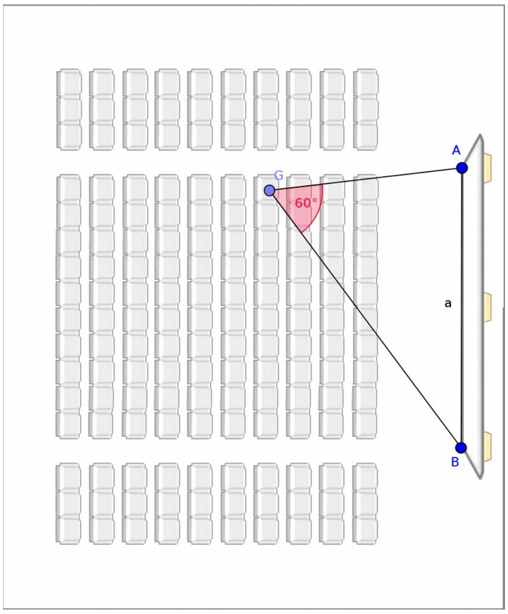
- ¿A qué tipo de ángulo en la geometría de la circunferencia correspondería el ángulo de visión que aparece en el enunciado? Sería un ángulo que tiene como vértice un punto de un arco de una circunferencia y cuyos lados cortan a la circunferencia en dos puntos.
- Si nos fijamos ahora en la pantalla del cine, ¿con qué elemento de la circunferencia lo relacionarías?

Seguimos razonando

- Si una persona tuviera un ángulo de visión central de 60º, ¿en qué asientos no le convendría sentarse? ¿Y si tuviera un ángulo de visión central de 120º?

Para contestar a estas preguntas, podríamos recortar triángulos en los que uno de los ángulos fuera de la amplitud que nos indican (60º ó 120º), y repetir el proceso, pero ¿por qué no comprobamos que realmente es un arco de circunferencia lo que se está señalando? ¿Y cómo podríamos encontrar el centro de la circunferencia?

Vamos a ver qué pasa con un ángulo de 60º .



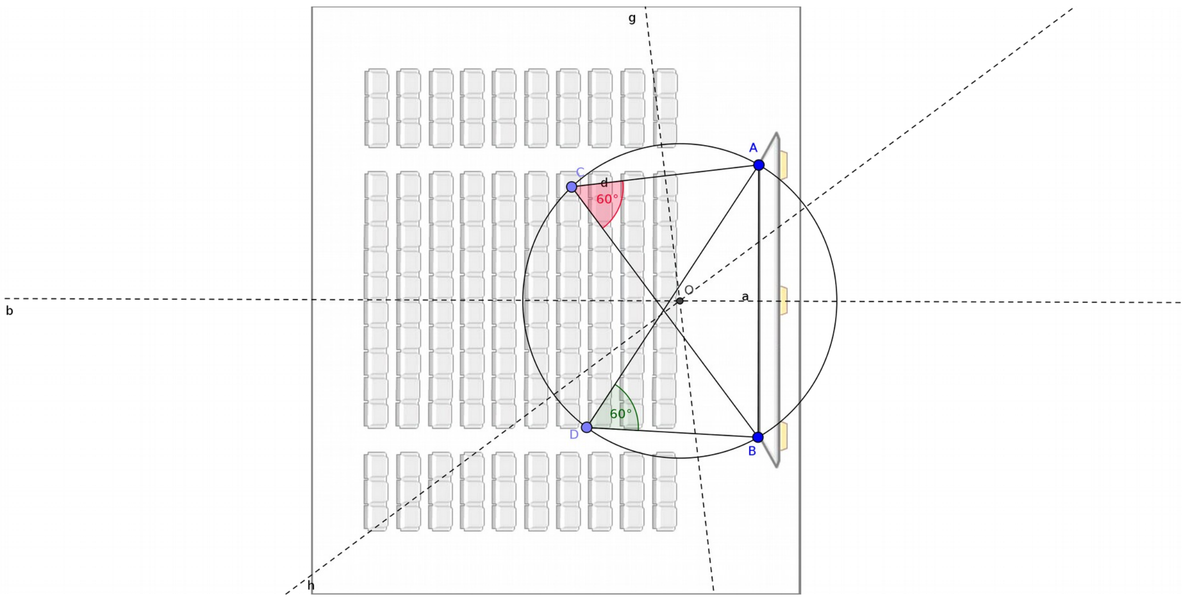
Si el ángulo de 60º corresponde a un ángulo inscrito, la pantalla sería la cuerda que delimita el arco en el que está inscrito el ángulo. Así que tendremos que trazar un arco de circunferencia que pase por esos tres puntos (vértice y extremos de la cuerda) y comprobar que todos los ángulos inscritos que tracemos con vértice en ese arco y que corten a la circunferencia en los extremos del arco miden 60º.

- Para trazar el arco tendremos que encontrar el centro de la circunferencia a la que pertenece y para encontrarlo vamos a recordar lo que sabemos de los puntos que pertenecen a una circunferencia:

- Si estos tres puntos pertenecen a la misma circunferencia, ¿qué condición cumplen los tres respecto a su centro?
- Desde luego, el centro de la circunferencia tendrá que estar a la misma distancia de los puntos B y C. ¿Cómo podemos encontrar todos los puntos que están a la misma distancia de dos dados?
- Así que el centro será un punto de la mediatriz del segmento BC, pero el centro también tendrá que estar a la misma distancia de los puntos B y D; y a la misma de los puntos C y D. Vamos a trazar las mediatrices de estos tres segmentos y veremos si hay algún punto que cumpla la condición de estar a la misma distancia de los tres puntos: ese será el centro de la circunferencia.

- Como las tres mediatrices se cortan en un único punto, parece que hemos encontrado el centro de la circunferencia. Vamos a trazarla, ¿qué radio tendrá?

Ahora ya sólo queda comprobar que todos los ángulos que podamos trazar con vértice en el arco al que pertenece B y delimitado por C y D, y cuyos lados corten a la circunferencia en C y D miden 60º.



Escribe con tus palabras la relación que hemos encontrado entre:

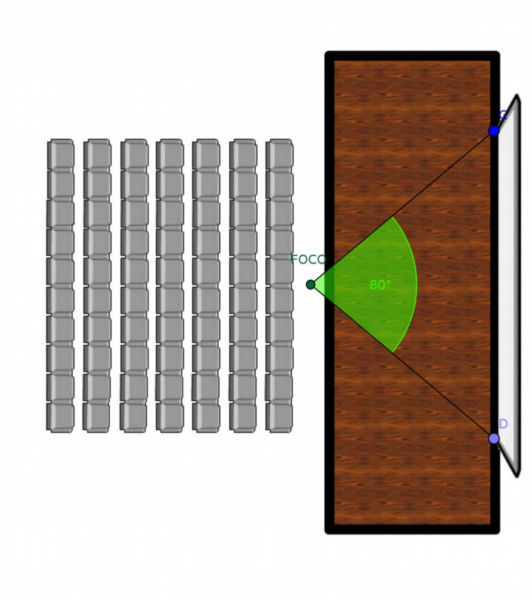
- una circunferencia
- un arco de esa circunferencia delimitado por dos puntos
- todos los ángulos inscritos que pueden trazarse, cuyos vértices estén en el arco y cuyos lados corten a la circunferencia en los puntos que delimitan el arco.

Sesión 8. Ángulos centrales

Problema. Foco en un teatro.

En un teatro, se estropea el foco central para iluminar la parte más importante del escenario. El foco estropeado tiene un amplitud de 80º y, al ser el foco central, está colocado de manera que el centro de su haz de luz ilumina el centro del escenario incidiendo con un ángulo de 90º.

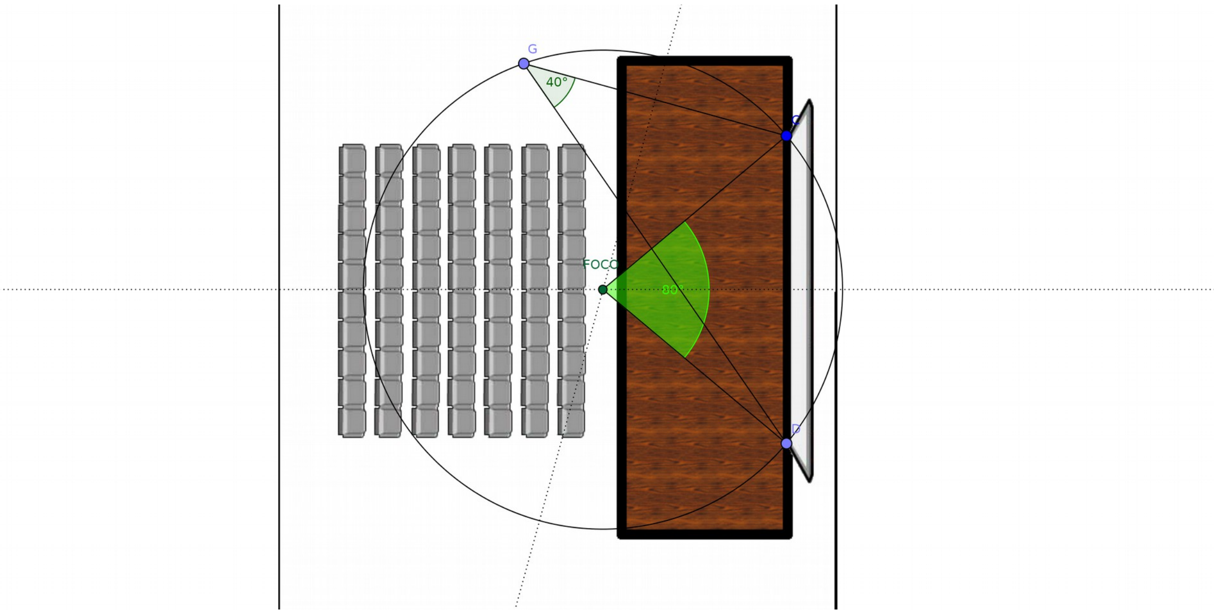
Sólo tenemos disponible otro foco de 40º para iluminar la misma zona, ¿dónde podríamos que colocarlo para que pueda iluminar la misma parte del escenario que el roto?



Para buscar todos los posibles sitios del foco de 40º, recortamos en papel vegetal un ángulo de 40º y marcamos un sitio donde podríamos colocar el foco para que ilumine la misma parte del escenario.

Ya sabemos que todos los puntos que desde los que vamos a poder iluminar esa parte del escenario con un foco de 40º forman un arco de una circunferencia.

Además, sabemos encontrar su centro trazando las mediatrices, así que vamos a hacerlo.



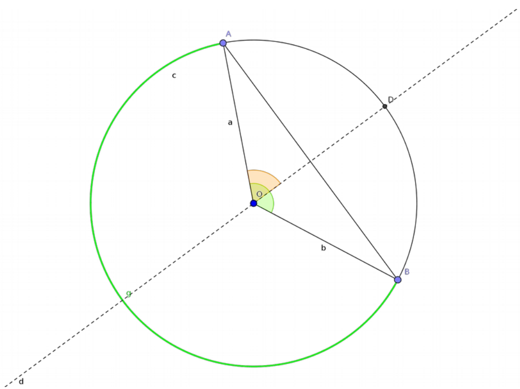
El centro de la circunferencia coincide con el vértice del ángulo de 80º. Es decir, que en la construcción que hemos hecho, el ángulo de 80º es un ángulo central.

¿Cómo cambiaría el problema si el foco estropeado fuera de 100º y tuviéramos focos de 50º?

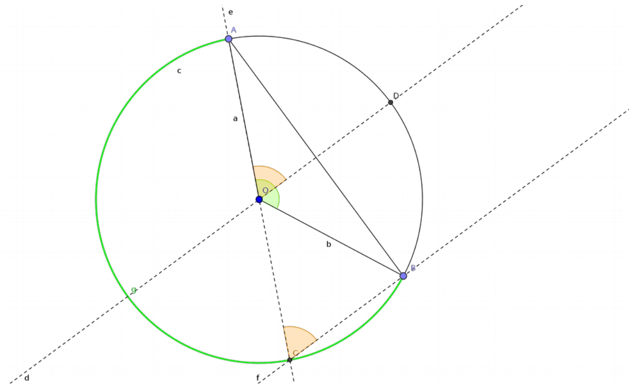
Vemos que hay una posible relación entre un ángulo central y los ángulos inscritos. Vamos a formular una hipótesis sobre esta relación: “El ángulo central determinado por un arco de circunferencia tiene el doble de amplitud que los ángulos inscritos con vértice en ese arco y cuyos lados cortan a la circunferencia en los extremos del arco.” Y ahora vamos a ver si es correcta:

- Dibuja una circunferencia y elije dos puntos cualesquiera de ella.

- Dibuja el ángulo central cuyos lados corten a la circunferencia en esos dos puntos y traza su bisectriz para obtener un ángulo que sea la mitad.



- Ahora vamos a trazar un ángulo que tenga la misma amplitud que el ángulo mitad (pintado en naranja, con centro en el arco que está marcado en verde. Para hacerlo, prolongamos el segmento AO hasta que corte de nuevo con la circunferencia y trazamos una paralela a la recta d (bisectriz) por ese nuevo punto de corte. El ángulo resultante es igual al ángulo mitad ya que tiene un lado en común y los otros lados son paralelos.



- Como sus lados cortan a la circunferencia en los puntos A y B, se trata de un ángulo inscrito definido por el mismo arco que el ángulo inicial.

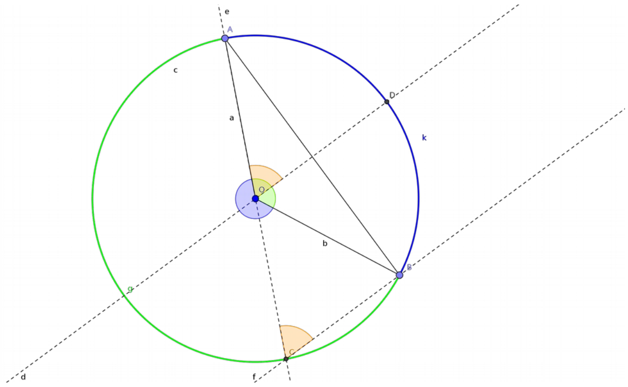
- Si esta conclusión es válida para el ángulo inscrito con vértice en el punto C, ¿lo será para cualquier otro ángulo inscrito con vértice en el arco marcado en verde y que corte a la circunferencia en los puntos A y B? ¿Por qué?

- Explica con tus palabras la relación que acabamos de encontrar.

Sesión 9. Al otro lado de la cuerda.

Seguro que a nadie se le ha escapado el hecho de que, cuando definimos una cuerda en una circunferencia, no sólo hay un arco, ni sólo un ángulo central, sino que hay dos arcos sobre los que podemos inscribir ángulos y dos ángulos centrales.

Vamos a retomar el dibujo que hemos hecho para ver que un ángulo central es el doble que cualquiera de los inscritos determinados por una misma cuerda, y nos vamos a fijar en el otro arco y en el otro ángulo central que completa la circunferencia, que están pintados de azul.



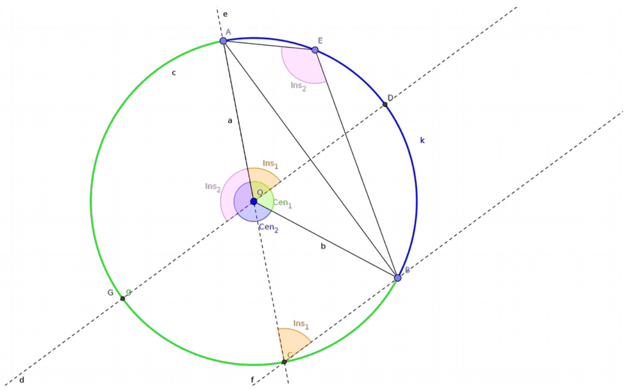
- Marca un punto cualquiera en el arco azul y dibuja un ángulo inscrito con los puntos de corte A y B.

- Calca el ángulo en otro papel, recórtalo y coloca su vértice sobre O de manera que uno de los lados coincida con el segmento a o con el b. ¿Qué observas?

Vamos a fijarnos en dos cosas:

1. El ángulo que hemos recortado es la mitad del ángulo azul.
2. Este ángulo y el naranja suman 180º.

Ha llegado el momento de mostrar el dibujo completo, poner nombres a los ángulos y dejar claras estas relaciones que hemos encontrado:



- Todos los ángulos inscritos que tracemos con vértice en el arco de color verde y que corten a la circunferencia en A y B, son iguales e iguales a Ins_1.

- El ángulo central Cen_1 es el doble que Ins_1.

- Todos los ángulos inscritos que tracemos con vértice en el arco de color azul y que corten a la circunferencia en A y B, son iguales e iguales a Ins_2.

- El ángulo central Cen_2 es el doble que Ins_2.

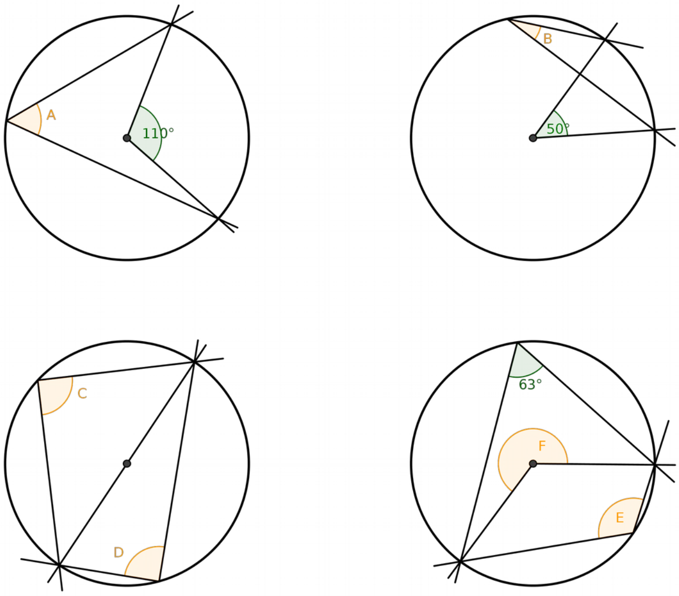
- Cen_1 y Cen_2 son ángulos conjugados: suman 360º.

- Ins_1 e Ins_2 son ángulos suplementarios: suman 180º.

Ejercicios

- ¿Qué ángulos forman las saetas de un reloj cuando marcan las 2 en punto?

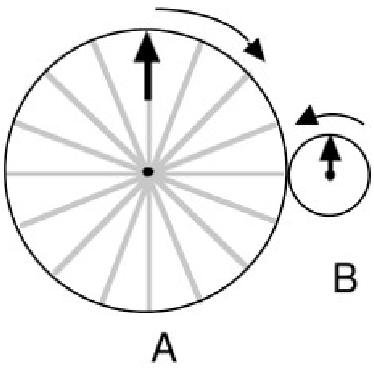
- Halla el valor de los ángulos indicados:



Problema. Ruedas

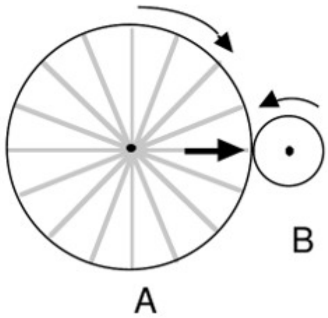
Las ruedas A y B giran juntas en sentidos opuestos. Mientras la rueda A hace una vuelta completa en sentido de las agujas del reloj, la rueda B hace 4 vueltas en sentido contrario.

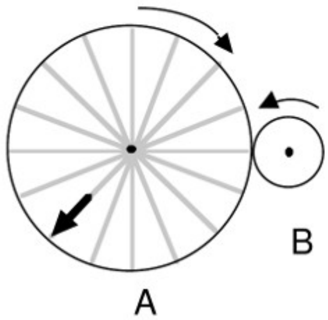
En este dibujo se muestra cómo están las ruedas al inicio.



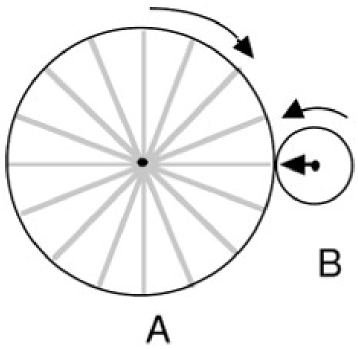
Los siguientes diagramas muestran distintas posiciones de las ruedas una vez que han empezado a girar.

En cada uno de estos casos dibuja la flecha que falta en la rueda B.





En este diagrama dibuja todas las posibles posiciones de la flecha en la rueda A.



Sesión 10. Figuras inscritas.

Grupos interactivos

MESA – A. Circunferencias y triángulos.

- Traza la circunferencia circunscrita de este triángulo. ¿Puede haber más de una? ¿Por qué?

- ¿Cómo construirías un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia?

- ¿Cómo construirías un triángulo equilátero?

MESA – B. Circunferencias y cuadriláteros.

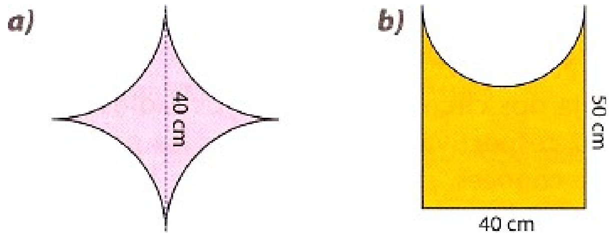
- Dibuja un cuadrilátero irregular inscrito en una circunferencia. Traza una diagonal del cuadrilátero. ¿Cuánto suman los ángulos inscritos que están a cada lado de la diagonal? ¿Por qué?

- Dibuja un cuadrado inscrito en una circunferencia.

MESA – C. Perímetros y Áreas.

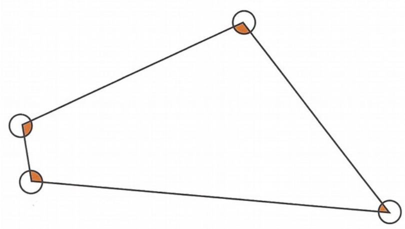
Ejercicio 1.

Calcula el perímetro de las siguientes figuras:



Ejercicio 2.

Tenemos 4 aros iguales de 1 cm de radio. Los unimos entre ellos y obtenemos un cuadrilátero irregular. ¿Cuánto mide el área sombreada de color naranja?



Problemates.
Lluís Segarra.
Editorial Graó.

Sesión 11. Repaso

Corrección de los ejercicios planteados en la sesión de Grupos Interactivos.

Completar el portfolio.

Resolver dudas.

Sesión 12. Prueba escrita de evaluación

Realización de una prueba escrita de evaluación.

Sesión 13. Corrección de la prueba escrita.

Corrección de los ejercicios de la prueba escrita.

5. Evaluación

Este apartado tiene como objeto definir cómo y con qué criterios se va a realizar la evaluación de la propuesta didáctica.

Serán objeto de evaluación:

- Los conocimientos en geometría adquiridos por los estudiantes.
- La actitud ante el quehacer matemático de los estudiantes.
- La propia propuesta didáctica.

La evaluación se realizará a través de tres instrumentos:

- Cuaderno de clase o portfolio con las actividades, problemas y ejercicios. Tendrá un peso del 35% sobre la nota final. Se valorará la compleción de las tareas, la expresión escrita sobre geometría y la presentación.
- Observación por parte del profesor o profesora. Tendrá un peso del 15% sobre la nota final. Se valorará la expresión oral para hablar sobre geometría, la participación e implicación en las tareas comunitarias. No se penalizará por dar respuestas incorrectas, lo importante es argumentar.
- Prueba escrita. Tendrá un peso del 50% sobre la nota final. Se compondrá de dos partes:
  1. Una prueba objetiva de evaluación de contenidos con una puntuación máxima de 9,5 puntos sobre 10. Está pensada para que se pueda realizar en 50 minutos y consta de 5 ejercicios.
  2. Un análisis individual, que podríamos calificar como metacognitivo, posterior a la corrección de los ejercicios sobre sus propios resultados. La realización de este análisis se evaluará con un máximo de 1 punto sobre 10.

  Un alumno o alumna que obtuviera la máxima calificación en ambas partes, obtendría un 10,5 sobre 10.

A continuación se trata con más detalle la prueba escrita, tanto la parte objetiva como el análisis metacognitivo.

5.1 La prueba escrita

Prueba objetiva

Ejercicio 1- (2 puntos)

Nos llega al buzón un folleto de propaganda de una pizzería. En él se indica que las siguientes ofertas tienen el mismo precio:

a) Una pizza circular de 50 cm de diámetro

b) Una pizza cuadrada de 50 cm de lado

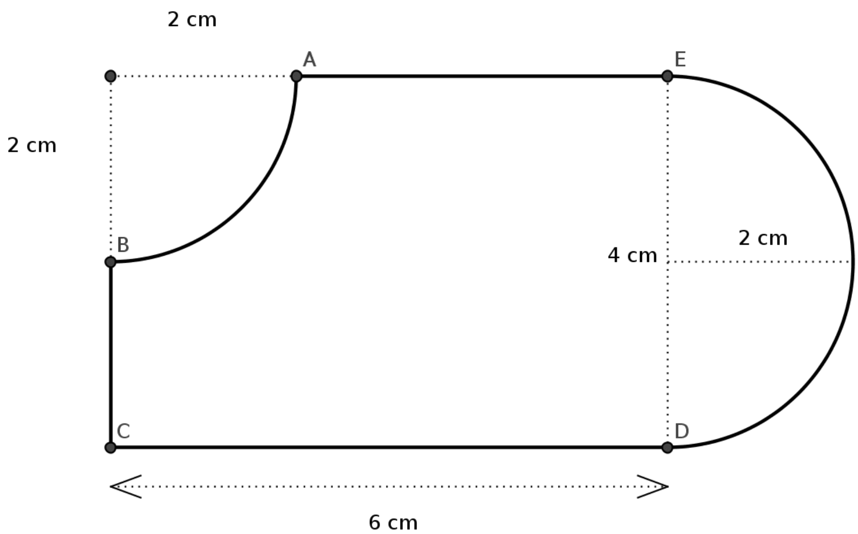
c) Una pizza cuadrada de 50 cm de diagonal

d) Dos pizzas de 25 cm de diámetro

¿Con qué opción comeríamos más pizza? ¿Y con cuál menos? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2- (2 puntos)

Calcula el área y el perímetro de la siguiente figura:

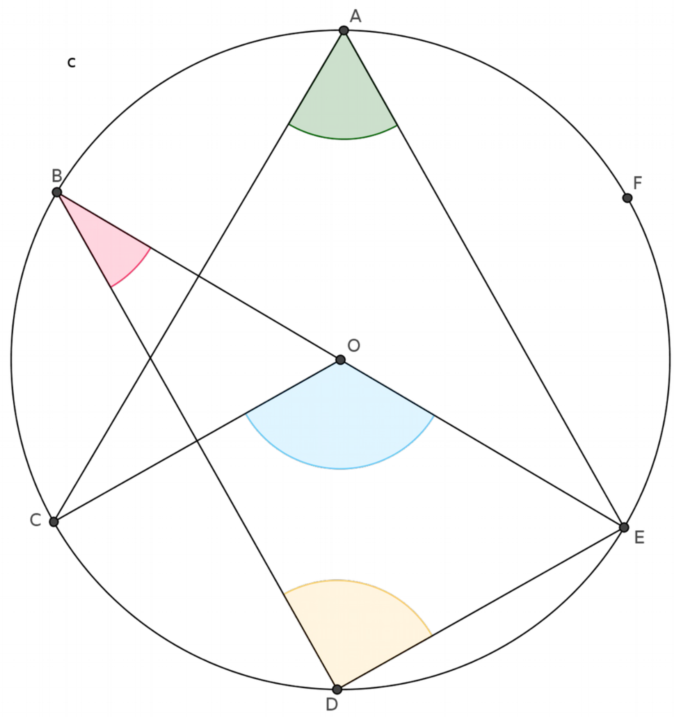


Ejercicio 3- (1,5 puntos)

¿Qué dos ángulos forman las saetas de un reloj circular cuando marcan las 5 en punto? ¿Cuántos grados miden cada uno de ellos? ¿Cuánto suman entre los dos?

Ejercicio 4- (2 puntos)

La circunferencia *c* cuyo centro es el punto O, está dividida en 6 arcos iguales por los puntos A, B, C, D, E y F.



Calcula el valor de los ángulos indicados en la figura sin ayudarte de un transportador de ángulos. <u>Razona tu respuesta</u>:

a) Ángulo con vértice en O

b) Ángulo con vértice en A

c) Ángulo con vértice en D

d) Ángulo con vértice en B

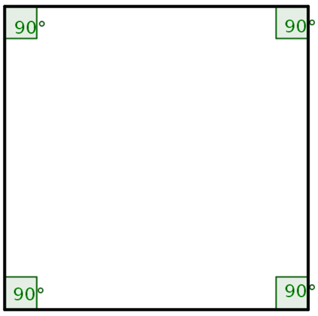
Ejercicio 5- (2 puntos)

Para cada uno de los siguientes cuadriláteros:

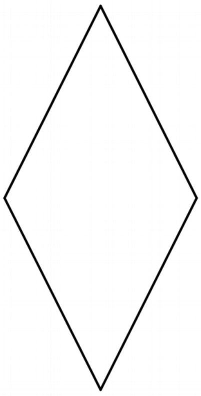
1- Si se puede inscribir en una circunferencia, calcula su centro y dibújala.

2- En caso de que no se pueda inscribir en una circunferencia, indica por qué.

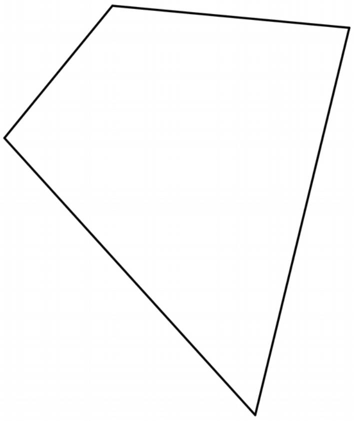
a)



b)



c)



Análisis metacognitivo

Una vez corregidos los ejercicios del examen en la pizarra entre toda la clase y con su examen delante, se repartirá la siguiente hoja como guía para que cada estudiante realice una reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje y el desarrollo de la prueba objetiva.

No debería costar más de 15 minutos realizar el análisis, pero no habría ningún problema en que el estudiante que lo deseara, se la llevara a casa para completarla.

Se propone que rellenen para cada ejercicio una tabla, además de una tabla final que hace referencia al proceso de estudio y preparación de la materia. Las indicaciones son que tienen que marcar las opciones, todas las que consideren, que se ajusten a su diagnóstico. En caso de no verse reflejado en ninguna de ellas o si lo prefieren (que sería lo ideal), se les animaría a que escribieran en los huecos que se han dejado lo que ellos consideren respecto a cómo les ha salido cada uno de los ejercicios o de las estrategias seguidas.

El objetivo no es hacer una relación completa de posibilidades, ni de hacer una autoevaluación estableciendo grados o números. Se trata de una encuesta para forzar a los estudiantes a hacer este tipo de reflexiones.

Para cada ejercicio:

Ejercicio X. ¿Cómo te ha salido?			
	Me ha salido perfecto		No he entendido el enunciado
	Lo sé hacer aunque no me ha dado tiempo a acabarlo		No sabía hacerlo
	Lo entiendo aunque me he confundido		Pensaba que sí que sabía hacerlo pero me he atascado
	He pensado en varias formas de resolverlo y he elegido la mejor		No he elegido el método adecuado
	El planteamiento es correcto		Me lío con tantas operaciones
	Antes no entendía estos problemas y ahora sí		No me ha dado tiempo ni a empezar

Para evitar los fallos que hayas cometido: Si tuvieras el examen la semana que viene, ¿qué harías para que no te volviera a pasar?			
	Estudiaría más		Preguntaría a mi profe algo que no entiendo bien
	Haría más ejercicios para no atascarme o que me diera tiempo a terminar		He hecho muchos ejercicios pero sólo de los que me salen bien
	No me lo dejaría para el último día porque tenía mucho sueño en el examen		Tengo que repasar los ejercicios en el examen
¿Qué estrategias has seguido para preparar este examen que piensas que te han ido bien?			
	He estado atento/a en clase		Me he concentrado en repasar lo que me resulta más difícil
	He practicado lo suficiente		El día anterior me fui pronto a dormir

5.2 Qué se quiere evaluar

Ejercicio 1

Es un ejercicio que pretende medir:

- la capacidad de diseñar una estrategia
- conocimiento del cálculo de áreas de círculos

El hecho de no proporcionar ningún dibujo, supone una dificultad extra que el estudiante tendrá que resolver haciendo uno, o recurriendo a la solución numérica. Según se elija una estrategia más geométrica o más numérica, las técnicas y tecnologías son diferentes, aunque de todas maneras, para poder justificar el orden entre las opciones c) y d) sí que es necesario calcular las áreas de un cuadrado y de un círculo. En caso de elegir una estrategia numérica, las técnicas serían las de cálculo de áreas, mientras que si se recurre, en lo posible a una estrategia más geométrica, una parte del ejercicio puede resolverse con técnicas de dibujo y razonamiento geométrico.

Ejercicio 2

Es un ejercicio que pretende medir el conocimiento sobre:

- el cálculo de áreas de figuras planas
- el cálculo de perímetros
- el cálculo de longitudes de arcos
- el cálculo de áreas de sectores circulares

Las técnicas que se requieren conocer para realizar este ejercicio son las de cálculo de los objetos que acabamos de enumerar además de la de cálculo de áreas de figuras planas por descomposición. Las tecnologías son las propias definiciones de área y perímetro ; el principio de conservación del área; la proporcionalidad entre la longitud del arco y el ángulo que lo define respecto a la longitud total de la circunferencia y el ángulo de 360º; la proporcionalidad entre el área de un sector circular y el ángulo que lo define respecto al área total del círculo y el ángulo de 360º.

Ejercicio 3

Es un ejercicio que pretende medir el conocimiento sobre:

- el cálculo de la amplitud de un ángulo en función de la porción del arco que lo define

- ángulos de más de 180º
- valor de 360º como el del ángulo de define una circunferencia completa

Las técnicas que se requieren conocer para realizar este ejercicio son las de cálculo de los objetos que acabamos de enumerar. Las tecnologías son las propias definiciones de 360º como el valor del ángulo que abarca toda una circunferencia; de arco y de ángulo central.

Ejercicio 4

Es un ejercicio que pretende medir el conocimiento sobre:

- el cálculo de la amplitud de un ángulo en función de la porción del arco que lo define
- relaciones entre ángulos centrales e inscritos

Las técnicas que se requieren conocer para realizar este ejercicio son las de cálculo de los objetos que acabamos de enumerar. Es un ejercicio eminentemente teórico, por lo que las tecnologías son las respuestas que buscamos cuando pedimos que se razonen.

Ejercicio 5

Es un ejercicio que pretende medir el conocimiento sobre:

- cuadriláteros inscritos en una circunferencia
- construcción de una circunferencia a partir de unos elementos dados

El ejercicio se puede resolver de varias formas. Una técnica sería, para cada uno de los cuadriláteros, intentar buscar el centro de la circunferencia como intersección de las mediatrices de sus lados; si las cuatro mediatrices se cortan en un punto, ese es el centro. Otra técnica podría ser la de medir los ángulos de los cuadriláteros y comprobar si la suma de los opuestos es 180º. En caso del cuadrado, trazando sus diagonales encontraríamos el centro. Las tecnologías son las respuestas que buscamos cuando pedimos que se razonen.

Análisis metacognitivo

Aunque no se trate de un contenido específicamente matemático, con la realización del análisis propuesto se abordarían contenidos del Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas:

- Planificación del proceso de resolución de problemas.
- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de

unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

Desde mi punto de vista, el propio proceso de aprendizaje puede plantearse como un proceso de resolución de problemas que puede verse facilitado por una planificación; asimismo el analizar errores y aprender de ellos, forma parte de las actitudes propias del trabajo científico. De la misma manera, el ser consciente del camino avanzado y de los obstáculos superados ha de ayudar, necesariamente, a la motivación por el aprendizaje de la materia.

5.3 Respuestas esperadas y posibles errores

Ejercicio 1

Respuestas correctas

Las respuestas correctas estarán basadas en el cálculo o comparación de áreas. En caso de que se intentara justificar con otros cálculos como perímetros, sería incorrecta.

Opción 1. Calculamos el área de las 4 ofertas y elegimos las de máxima y mínima áreas para contestar a las preguntas.

Área de la oferta a)

$$A_a=\pi\cdot r^2=3{,}14\cdot 25^2=1962{,}5\,cm^2$$

Área de la oferta b)

$$A_b=50^2=2500\,cm^2$$

Área de la oferta c)

Opción 1.1

$$A_c=\frac{50\cdot 50}{2}=1250\,cm^2$$

Opción 1.2

$$50^2=l^2+l^2\Rightarrow l=\sqrt{\frac{50^2}{2}}=\frac{50}{\sqrt{2}}$$

$$A_c=\frac{50}{\sqrt{2}}\cdot\frac{50}{\sqrt{2}}=1250\,cm^2$$

Área de la oferta d)

$$A_d=2\cdot(\pi\cdot r^2)=2\cdot 3{,}14\cdot 12{,}5^2=981{,}25\,cm^2$$

Con la oferta b) es con la que comeríamos más pizza y con la oferta d) con la que menos.

Opción 2. Razonamiento geométrico sin apoyo de un dibujo

Para ver con qué opción comeríamos más pizza tenemos que ver cuál es la de mayor área.

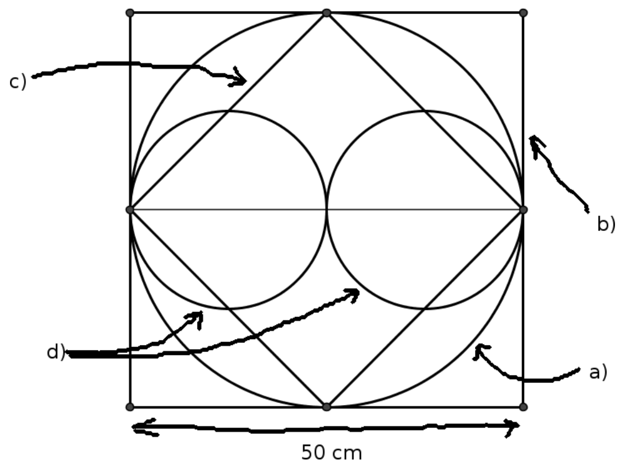
Entre las 4 ofertas, la mejor es la oferta b) ya que:

- $A_b > A_a$ porque una circunferencia de 50cm de diámetro se puede inscribir en un cuadrado de 50cm de lado.
- $A_a > A_c \, y \, A_a > A_d$ porque la oferta c) es un cuadrado que podríamos inscribir en a) y porque cada una de las dos pizzas de mitad de diámetro que a) correspondientes a la oferta d) tiene un área 4 veces más pequeña que la de la oferta a).

Para saber cuál es la peor oferta, hay que ver qué oferta es la de menor área c) ó d).

En este caso, salvo que se haga un razonamiento geométrico coherente, será necesario realizar los cálculos de las áreas como se han realizado en la primera opción y comparar.

Opción 3. Haciendo un dibujo.



Realizando un dibujo como éste, o similar, se puede justificar que la oferta b) es con la que comemos más pizza, y que la c) y la d) son las peores.

También se puede “ver” que con la oferta de la opción d) es con la que comemos menos pizza, pero si no se justifica mejor, no se obtendría la puntuación completa.

Para demostrar que la oferta d) es la de menor área, habría que recurrir al cálculo de áreas (como se ha expuesto en la primera opción), aunque si se justifica coherentemente de forma geométrica, también tendría la puntuación máxima.

Posibles errores

- No saber interpretar bien el enunciado y no identificar que la solución pasa por la comparación o el cálculo de áreas.
- Interpretar mal la información al trasladarla a los dibujos.
- Calcular mal las áreas de los círculos por no recordar la fórmula.
- Calcular mal las áreas de los cuadrados por no recordar la fórmula.
- Aunque se escriban bien las fórmulas de las áreas de los círculos y los cuadrados, se pueden cometer errores a la hora de sustituir los valores.
- Errores en operaciones.
- Ausencia o errores con las unidades de medida

Ejercicio 2

Respuestas correctas

1. Cálculo del área

Opción 1. Compenso el cuarto de circunferencia que le falta al rectángulo en su esquina superior izquierda por uno de los dos cuartos que añadimos, ya que el radio es el mismo.

$$A=6\cdot 4+\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=24+3{,}14=27{,}14\ cm^2$$

Opción 2. Por descomposición, sumando y/o restando diferentes figuras.

$$A=6\cdot 4-\frac{\pi\cdot 2^2}{4}+\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=24-3{,}14+2\cdot 3{,}14=27{,}14\,cm^2$$

2. Cálculo del perímetro

Por descomposición, sumando los distintos fragmentos de perímetro.

$$P=2+6+\frac{2\cdot\pi\cdot 2}{2}+4+\frac{2\cdot\pi\cdot 2}{4}=12+3\cdot 3{,}14=21{,}42\,cm$$

Posibles errores

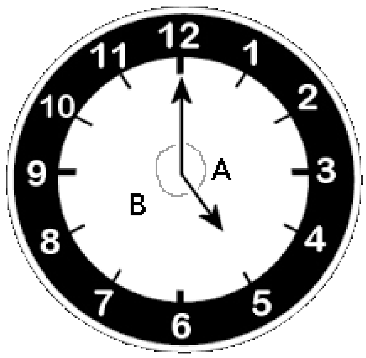
- No saber plantear una descomposición que facilite llegar a una solución.

- Calcular mal las áreas de los sectores circulares por no recordar la fórmula.
- Calcular mal el área del rectángulo por no recordar la fórmula.
- Aunque se escriban bien las fórmulas de las áreas de los círculos y los cuadrados, se pueden cometer errores a la hora de sustituir los valores.
- Errores en operaciones.
- Ausencia o errores con las unidades de medida

Ejercicio 3

Respuesta correcta

El ángulo pequeño $\hat{A}=360\cdot\frac{5}{12}=150^{o}$



El ángulo grande $\hat{B}=360\cdot\frac{7}{12}=210^{o}$

Ambos tienen que sumar 360º porque juntos abarcan la circunferencia completa.

También es válido haberse dado cuenta de que ambos suman 360º y calcular uno como lo que le falta al otro para llegar a 360º.

Se podría haber resuelto el ejercicio sin necesidad de hacer un dibujo, pero en ese caso, habría que explicar algo más de los ángulos que se forman.

Posibles errores

- No saber plantear la proporción del arco
- No darse cuenta de los dos ángulos y sólo pensar en uno de ellos
- Errores en operaciones.

Ejercicio 4

Respuestas correctas

Las justificaciones que se ofrecen no tienen por qué ser las únicas válidas.

a) $\widehat{O}=120^o$ Justificaciones que podrían darse por válidas:

- $\widehat{O}=360\cdot\frac{2}{6}=120^o$
- ACE forman un triángulo equilátero y todos sus ángulos son de 60º, entonces $\widehat{A}=60^o$ y $\widehat{O}$ mide el doble que $\widehat{A}$

b) $\widehat{A}=60^o$ Justificaciones que podrían darse por válidas:

- ACE forman un triángulo equilátero y todos sus ángulos son de 60º
- El ángulo $\widehat{O}$ mide 120º y el ángulo $\widehat{A}$ es la mitad

c) $\widehat{D}=90^o$

Justificaciones que podrían darse por válidas:

- $\widehat{D}$ es el ángulo recto del triángulo BDE. Es un triángulo rectángulo porque la hipotenusa es un diámetro de su circunferencia circunscrita.
- $\widehat{D}$ es la mitad de un ángulo central que tiene una amplitud de 180º porque es una semicircunferencia completa.

d) $\widehat{B}=30^o$

Justificaciones que podrían darse por válidas:

- $\widehat{B}$ es la mitad de un ángulo central que abarcara su mismo arco. Es ángulo mediría 60º porque es un sexto de 360º, por lo que $\widehat{B}=30^o$
- Se puede llevar a cabo un razonamiento similar dibujando sobre la figura.

Posibles errores

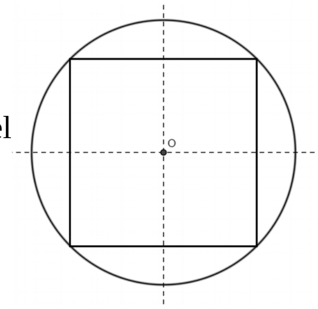
- No saber plantear la proporción del arco
- No darse cuenta de las relaciones entre los ángulos centrales y los inscritos
- Errores en operaciones.

Ejercicio 5

Respuestas correctas

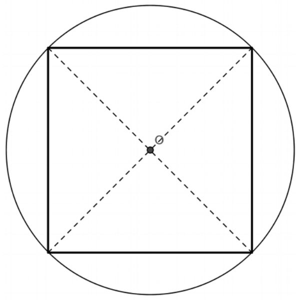
a) Sí que se puede.

Opción 1. Trazando las mediatrices.



Las mediatrices de los lados se cortan en un punto que es el centro de la circunferencia circunscrita.

Opción 2. Por ser una figura regular, el corte de las bisectrices también llevaría al centro de la circunferencia circunscrita. En el caso del cuadrado, además, coincide con las diagonales, por lo que su trazado es mucho más sencillo.

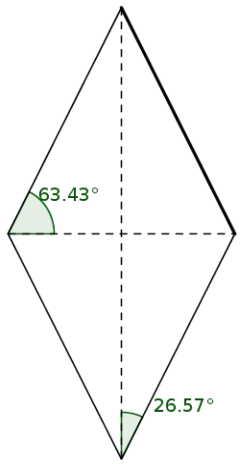


El punto donde se cortan es el centro de la circunferencia.

b) No se puede.

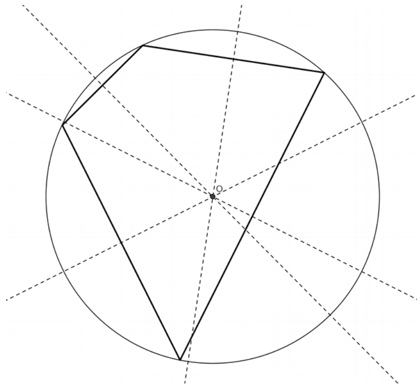
Justificaciones que podrían darse por válidas (no tienen por qué ser las únicas):

- No se puede porque cada pareja de ángulos opuestos no suman 180º.
- Me fijo en uno de los lados del cuadrilátero. Si pudiera inscribirse en una circunferencia, los otros dos vértices tendrían que ser vértices de ángulos inscritos de la la circunferencia. Si trazo los lados que faltan para formar los ángulos inscritos, los ángulos que forman no son iguales, por lo que los vértices no pueden pertenecer a la circunferencia.



- Si busco el centro de la circunferencia circunscrita teniendo en cuenta sólo tres de los vértices del cuadrilátero, el cuarto no pertenece a ella. Como para tres puntos no alineados sólo hay una circunferencia que pase por los tres puntos, si esa no pasa por el cuarto, es que no hay ninguna que pueda.

c) Sí que se puede. Trazamos las mediatrices de los 4 lados y se cortan en un único punto que es el centro de la circunferencia.



En el enunciado de la pregunta no se pide explicación en caso de que sí que se pueda trazar la circunferencia circunscrita porque sería la explicación equivalente a la que se tiene que dar en el apartado b). En caso de no saberlo explicar, se estaría penalizando 3 veces por el mismo error, de esta manera sólo se penaliza en uno de los apartados.

Posibles errores

- No reconocer cuándo un cuadrilátero puede estar inscrito en una circunferencia.
- No saber cómo encontrar el centro de una circunferencia determinada por 3 puntos no alineados.
- Errores en el trazado.

5.4 Criterios de calificación y guía de corrección

Criterios de calificación

Se trata de una prueba eminentemente teórica en la que se quiere medir en qué medida se ha profundizado en el razonamiento geométrico. Es por esta razón que la parte analítica tiene muy poco peso y las partes de justificar, razonar y explicar son más importantes.

El nivel de justificación requerido no es un nivel formal, sino el indicado por el nivel 2 del modelo van Hiele de Deducción informal en el que son capaces de desarrollar argumentos informales para justificar o dar explicaciones sobre sus respuestas. (Malloy, 2002)

Explicaciones de niveles inferiores, basadas en simples observaciones no obtendrían la máxima puntuación.

A la hora de calificar, para cada uno de los ejercicios tomaremos en cuenta las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales y utilizaremos el siguiente criterio:

- Cualquier intento real de realizar un ejercicio en el que se demuestre que se poseen conocimientos geométricos relacionados con el ejercicio, será premiado con, al menos, 1 punto sobre 10.
- Si las tareas principales son correctas, el ejercicio se puntuará con, como mínimo 4 puntos sobre 10. Errores en tareas principales podrían suponer que se considere que el ejercicio está mal y no se puntúe nada.
- Los errores en tareas auxiliares generales no podrán penalizar más 3 sobre 10 de la puntuación total del ejercicio.
- Errores en tareas auxiliares específicas no podrán penalizar más de 6 sobre 10 de la puntuación total del ejercicio.

La prueba adicional de análisis metacognitivo se evaluará de la siguiente manera:

- 0,5 puntos (sobre 1), si contesta todos los apartados, aunque sólo sea con una marca en alguna de las opciones.
- 0,5 puntos (sobre 1), cuando el estudiante ha dado muestras de haber hecho una reflexión sobre su examen y su proceso de aprendizaje, expresando con sus palabras las conclusiones a las que llega.

Guía de corrección

Ejercicio 1

Tareas principales:

1. Seguir una estrategia coherente que permita resolver el problema.

   El estudiante ha de plantear el ejercicio como un problema de cálculo o comparación de áreas. Si lo intenta realizar comparando otras medidas como el perímetro, no obtendrá ninguna puntuación (salvo 1 sobre 10 si se ve que ha habido un esfuerzo en intentar resolverlo).

2. Cálculo del área de un círculo.

   En caso de no conocer la fórmula del cálculo del área de un círculo, se penalizará con 5 puntos sobre 10.

Tareas auxiliares específicas:

1. Memorización de una aproximación de π. El valor de 3,14 es suficiente.

   En el ejercicio no es estrictamente necesario sustituir π por una aproximación decimal, pero sí que es necesario poder comparar áreas que dependen de su valor. Si no es capaz de hacerlo, se penalizará con 2 puntos sobre 10. Es posible que los estudiantes utilicen calculadoras que proporcionen el valor de π. Si es así, saber usarla les puede permitir no tener que memorizar una aproximación.

2. Cálculo del área de un cuadrado conociendo su lado

   Si no sabe calcular el área del cuadrado conociendo su lado se penalizará con 2 puntos sobre 10.

3. Cálculo del área de un cuadrado conociendo su diagonal

   Si no sabe calcular el área del cuadrado conociendo su lado se penalizará con 2 puntos sobre 10.

Tareas auxiliares generales:

1. Operaciones aritméticas.

   Despistes, errores al copiar los datos, fallos usando la calculadora se penalizarán hasta un máximo de 2 puntos sobre 10.

2. Indicación de las unidades de medida

   Si no se indican las unidades o no son correctas (por ejemplo utilizar unidades lineales para superficies), se penalizará con un máximo de 2 puntos sobre 10.

Ejercicio 2

Este ejercicio se calificará con el 50% el cálculo del área y con el 50% el cálculo del perímetro.

Tareas principales:

1. Plantear una descomposición de la figura que permita llevar a una solución.

   Cualquier planteamiento que pueda resolver es válido, pero dado que existe un planteamiento que consideramos sencillo, el no llegar a uno, se considera como un error grave, aunque se puede valorar positivamente alguna otra parte que esté bien descompuesta.

2. Cálculo de la longitud de un arco. (Perímetro)

   Si no sabe calcular la longitud de los arcos se penalizará con 3 puntos sobre 5.

3. Cálculo del área de un sector circular. (Área)

   Si no sabe calcular el área de los sectores circulares se penalizará con 3 ptos sobre 5.

Tareas auxiliares específicas:

1. Memorización de una aproximación del número pi. El valor de 3,14 es suficiente.

   Si no es capaz de hacerlo, se penalizará con 2 puntos sobre 10. Es posible que los estudiantes utilicen calculadoras que proporcionen el valor de π. Si es así, saber usarla les puede permitir no tener que memorizar una aproximación.

2. Cálculo del área de un rectángulo conociendo sus lados

   Si no sabe calcular el área del cuadrado conociendo su lado se penalizará con 2 puntos sobre 10.

Tareas auxiliares generales:

1. Operaciones aritméticas.

   Despistes, errores al copiar los datos, fallos usando la calculadora se penalizarán hasta un máximo de 2 puntos sobre 10.

2. Indicación de las unidades de medida

   Si no se indican las unidades o no son correctas (por ejemplo utilizar unidades lineales para superficies), se penalizará con un máximo de 2 puntos sobre 10.

Ejercicio 3

Tareas principales:

1. Realizar un planteamiento (mediante una explicación o un dibujo) que lleve a la solución

   Cualquier planteamiento que pueda resolver es válido, pero si no se recurre a un dibujo, el nivel requerido de explicación literal será mayor, ya que tendrá que suplir la ausencia de imagen.

Si no se da un planteamiento válido, el ejercicio no puntuará (salvo 1 sobre 10 si se ve que ha habido un esfuerzo en intentar resolverlo).

2. Identificación de los dos ángulos

   Si no se indica en el dibujo, o no se explica, a qué dos ángulos se refiere el enunciado se penalizará con un máximo de 3 puntos sobre 10.

3. Cálculo del ángulo conociendo proporción de arco que abarca

   Si no sabe calcular el ángulo conociendo la proporción de arco que abarca se penalizará con 3 puntos sobre 10.

Tareas auxiliares generales:

1. Identificación de la suma de ambos como el ángulo de 360º que abarca toda la circunferencia

   Si no sabe identificar la suma con el ángulo completo se penalizará con 2 puntos sobre 10.

Tareas auxiliares generales:

1. Operaciones aritméticas.

   Despistes, errores al copiar los datos, fallos usando la calculadora se penalizarán hasta un máximo de 2 puntos sobre 10.

2. Indicación de las unidades de medida de ángulos

   Si no se indican las unidades o no son correctas, se penalizará con un máximo de 2 puntos sobre 10.

Ejercicio 4

Tareas principales:

1. Cálculo razonado del valor del ángulo inscrito $\widehat{A}$

   Si no se razona (escribiéndolo) correctamente se penalizará hasta con 2,5 puntos sobre 10. Si se razona correctamente pero hay un error en el cálculo se contará como un error auxiliar general.

2. Cálculo razonado del valor del ángulo inscrito $\widehat{B}$

   Si no se razona (escribiéndolo) correctamente se penalizará hasta con 2,5 puntos sobre 10. Si se razona correctamente pero hay un error en el cálculo se contará como un error auxiliar general.

3. Cálculo razonado del valor del ángulo inscrito $\widehat{D}$

   Si no se razona (escribiéndolo) correctamente se penalizará hasta con 2,5 puntos sobre 10. Si se razona correctamente pero hay un error en el cálculo se contará como un error auxiliar general.

4. Cálculo razonado del valor del ángulo central $\widehat{O}$

   Si no se razona (escribiéndolo) correctamente se penalizará hasta con 2,5 puntos sobre 10. Si se razona correctamente pero hay un error en el cálculo se contará como un error auxiliar general.

Tareas auxiliares generales:

1. Operaciones aritméticas.

   Despistes, errores al copiar los datos, fallos usando la calculadora se penalizarán hasta un máximo de 2 puntos sobre 10.

2. Indicación de las unidades de medida de ángulos

   Si no se indican las unidades o no son correctas, se penalizará con un máximo de 2 puntos sobre 10.

Ejercicio 5

La puntuación para este ejercicio es de 3 sobre 10 para el apartado a), 3 sobre 10 para el apartado b) y 4 sobre 10 para el apartado c).

Tareas principales:

1. Saber justificar cuándo un cuadrilátero no se puede inscribir en una circunferencia.

   Una justificación sólo basada en la evidencia de que no se ha podido construir la circunferencia, se evaluará con 5 sobre 10, ya que el hecho de intentar encontrar el centro y no conseguirlo no quiere decir que no exista. Serán necesarias otras justificaciones geométricas, basadas en la suma de los ángulos opuestos, etc.; si están bien hechas, se otorgará la máxima puntuación.

Las explicaciones correctas sin intentar encontrar el centro también tendrán la máxima puntuación.

2. Planteamiento de una estrategia coherente que permita encontrar el centro de la circunferencia, en caso de que el cuadrilátero se pueda inscribir en una circunferencia.

   Cualquier estrategia válida para hallar el centro de la circunferencia en caso de que el cuadrilátero pueda inscribirse en una, otorgará la máxima puntuación.

Tareas auxiliares específicas:

1. Trazado de las mediatrices.

   Se penalizará con hasta 2 puntos sobre 10 de cada apartado si no se trata de errores de ejecución. En ese caso se contarán como errores en tareas auxiliares generales

2. Medida de ángulos.

   Se penalizará con hasta 2 puntos sobre 10 de cada apartado si no se sabe utilizar el transportador de ángulos para medir. Esto incluye prolongar los lados de las figuras si fuera necesario para poder utilizarlo.

Tareas auxiliares generales:

1. Operaciones aritméticas.

   Prácticamente no hay operaciones a realizar, pero las pocas que hay, en caso de error, se penalizará hasta 1 punto sobre 10 de cada apartado.

2. Ejecución de las construcciones.

   Errores de ejecución en las construcciones, como puede ser no tener cuidado a la hora de utilizar el compás o una regla, y suponga que no se obtenga el resultado esperado, se penalizarán con hasta 1 punto sobre 10 de cada apartado.

3. Indicación de las unidades de medida de ángulos

   Si no se indican las unidades o no son correctas, se penalizará con un máximo de 1 punto sobre 10 de cada apartado.

6. Referencias

AQA (2008). *GCSE Problem-Solving Questions, 2008 - Additional Mathematics*. Recuperado de: http://filestore.aqa.org.uk/subjects/AQA-9306-W-TG.PDF

Arias, J.M. y Maza, I. (2011). *Matemáticas. 1ºESO*. Madrid: Bruño.

Bartomeu, C., Capella, T., Besora, J., Jané, A. y Guiteras, J. M. (2011). *Matemáticas. 1ºESO*. Madrid: McGraw-Hill.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas. Educación Secundaria. Primer Curso*. Madrid: Anaya.

Consejo Superior de Deportes. *La Pista de Atletismo Cubierta*. Recuperado en junio de 2016 de: http://www.csd.gob.es/csd/instalaciones/politicas-publicas-de-ordenacion/actuaciones-en-el-ambito-tecnico/1normasNIDE/03Nide2/nide-2-normas-de-proyectos-campos-grandes-y-atletismo/atletismo-en-pista-cubierta/01pistcub/

Contreras, I., Fernández, I., Lobo, B., Pérez, J. L. y Uriondo, J. L. (2011). *Matemáticas. 1ºESO*. Madrid: Oxford Eduation.

Crowley, M. (1987), The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. *Learning and Teching Geometry*, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Mary Montgomery Lindquist, pp.1-16. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1987.

Ibánez, R. (2014). Pi atleta. En *Cuaderno de cultura científica.* Recuperado en Junio de 2016 de: *http://culturacientifica.com/2014/08/27/pi-atleta/*

Malloy, C. (2002). The van Hiele framework. Navigating through Geometry in Grades 6-8. *Reston: NCTM.*

Martínez Recio, A., y Juan Rivaya, F.(coord.)(1989). “La enseñanza de la Geometría en los primeros niveles de la Educación Secundaria” en *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría* (pp. 107-143) . Madrid: Síntesis.

Orden de 16 de junio de 2014, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Recuperado en Junio de 2016 de: http://www.educaragon.org/Files/Files/UserFiles/File/MAT%20ANEXO%20II%20BOA.pdf

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón, n.º 105*, 2016, 2 de junio.

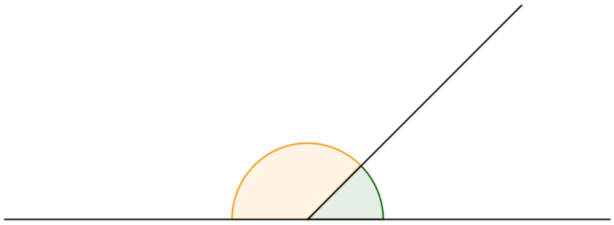
Pritchard, C. (2003). Introductory essay: a concise and selective history of geometry from Ur to Erlangen. *The changing shape of geometry: celebrating a century of geometry and geometry teaching.* Cambridge: Cambridge.

Real Decreto 1105/2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (Real Decreto 1105/2014, 26 de diciembre). *Boletín Oficial del Estado, n.º 3*, 2015, 3 de enero.

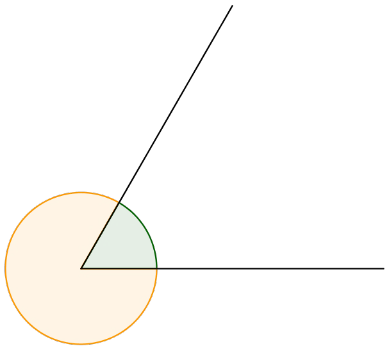
Anexo I. Prueba de conocimientos previos

Ejercicio 1. Indica cuánto miden cada uno de los siguientes ángulos. Puedes ayudarte de un transportador de ángulos:

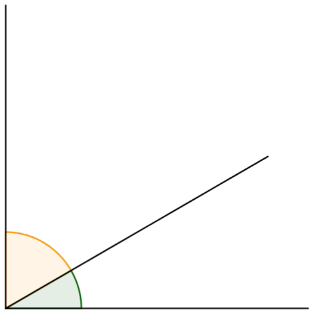
a)



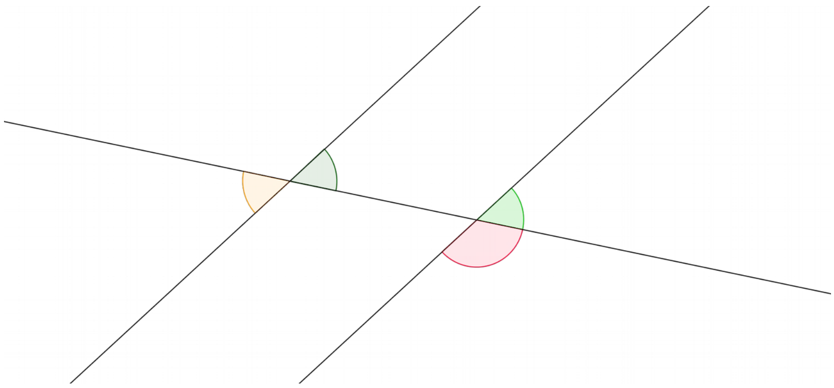
b)



c)

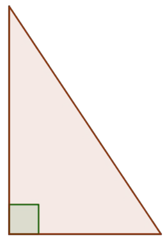


d)

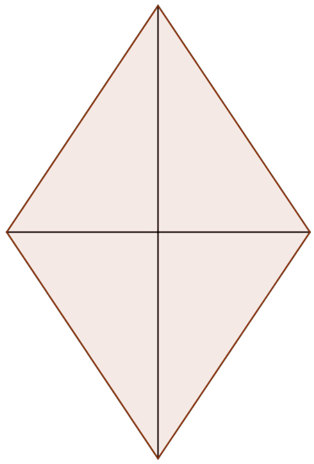


Ejercicio 2. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras. Puedes ayudarte de una regla numerada:

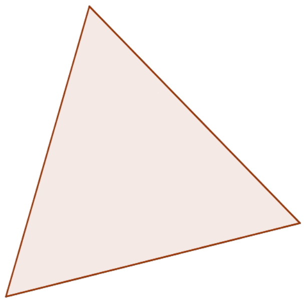
a)



b)

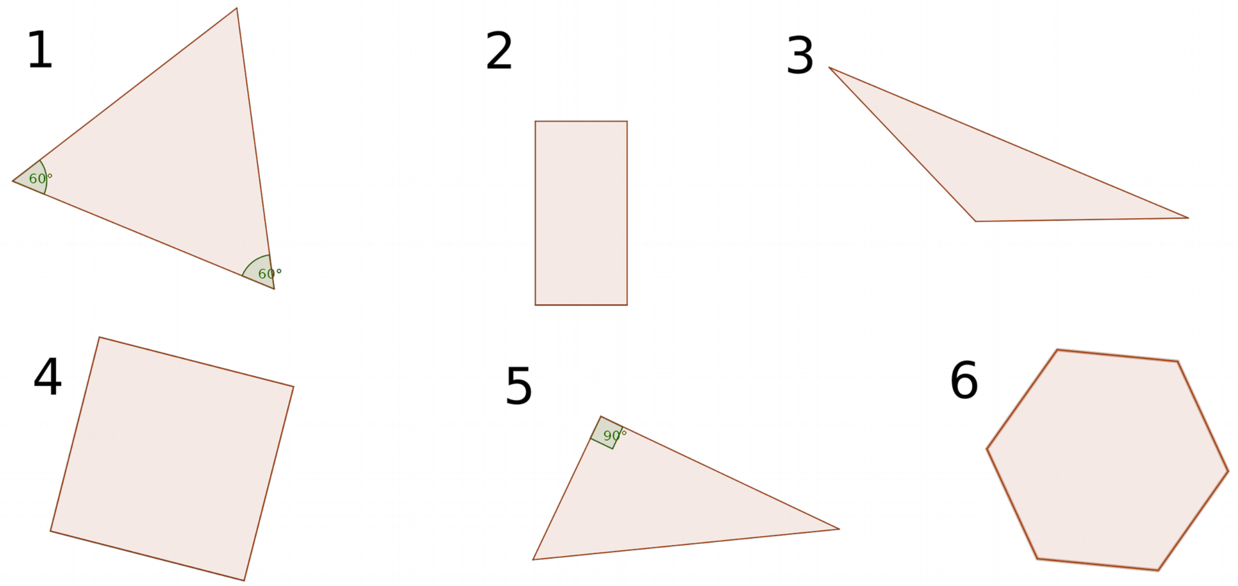


c)



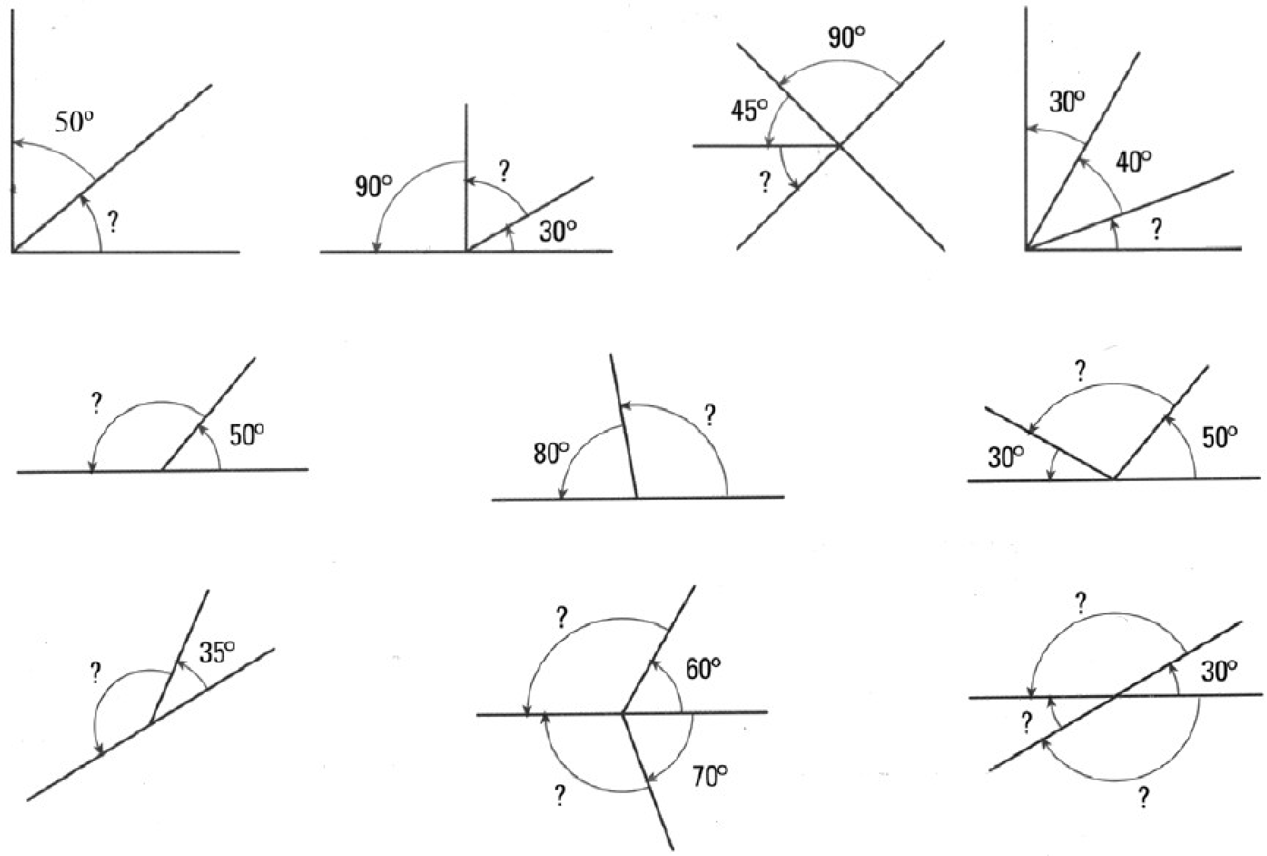
Ejercicio 3. Dibuja una circunferencia ayudándote de un compás y señala en ella a qué corresponden los siguientes elementos: radio, diámetro, longitud, área encerrada.

Ejercicio 4. ¿Qué puedes decir de las siguientes figuras teniendo en cuenta sus lados y sus ángulos?

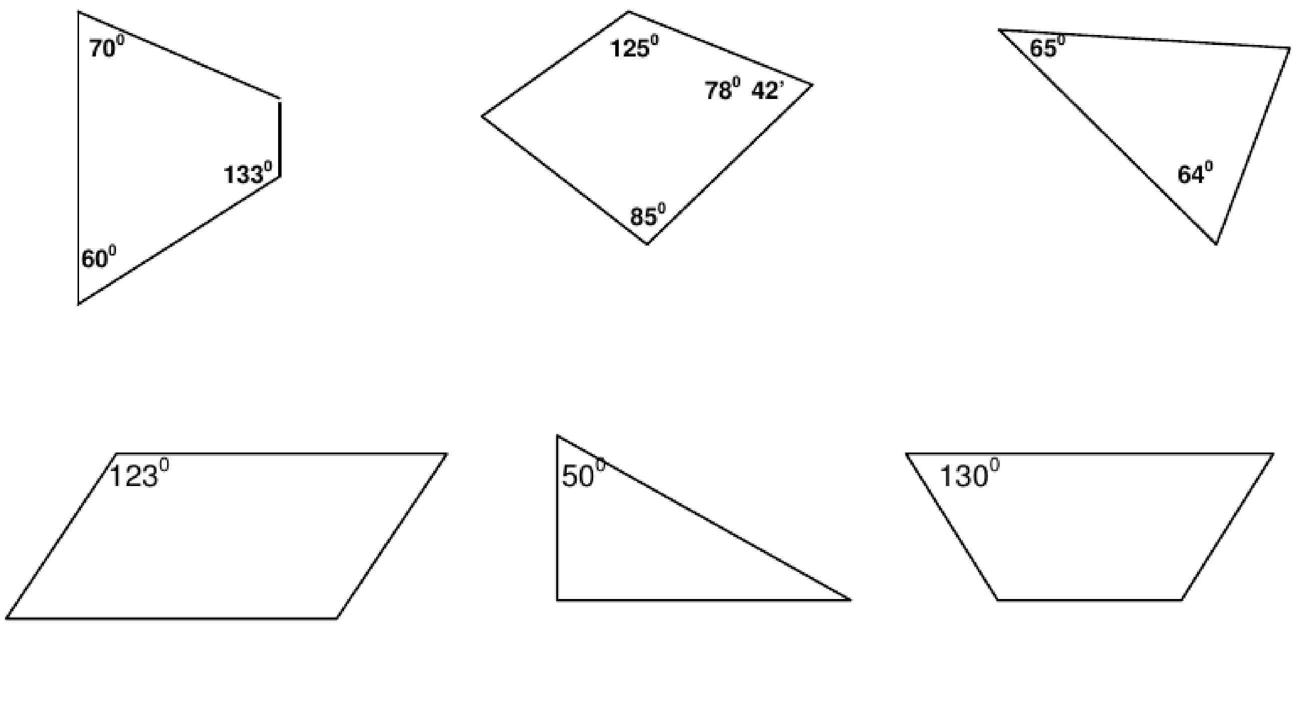


Anexo II. Ejercicios de refuerzo

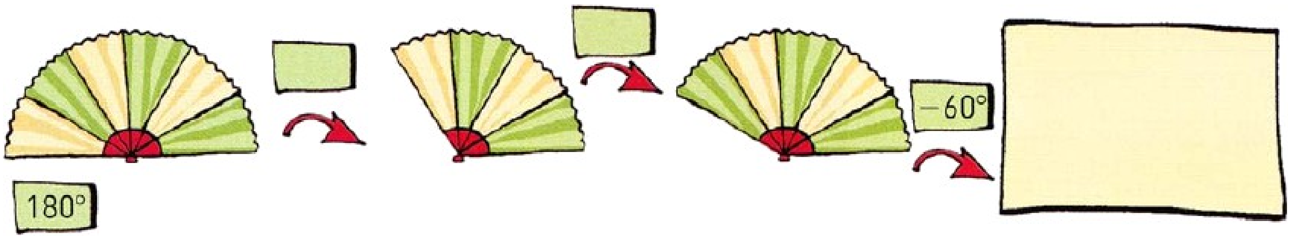
Ejercicio 1. Sin ayuda del transportador, calcula el valor de los ángulos indicados en cada figura.



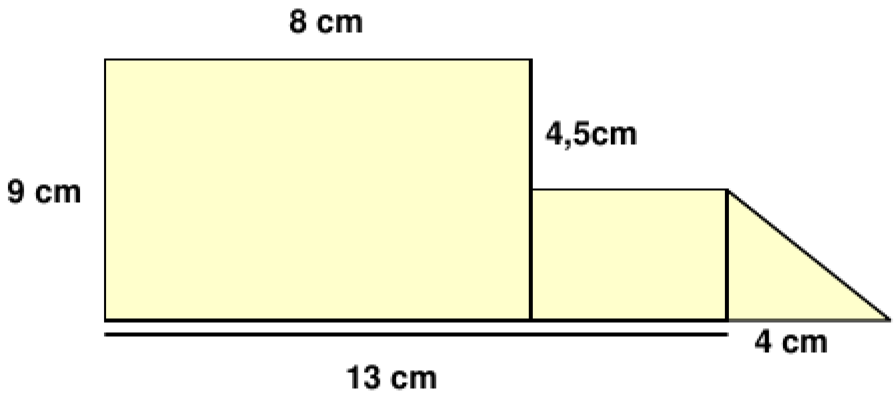
Ejercicio 2. Averigua el valor de los ángulos interiores que faltan



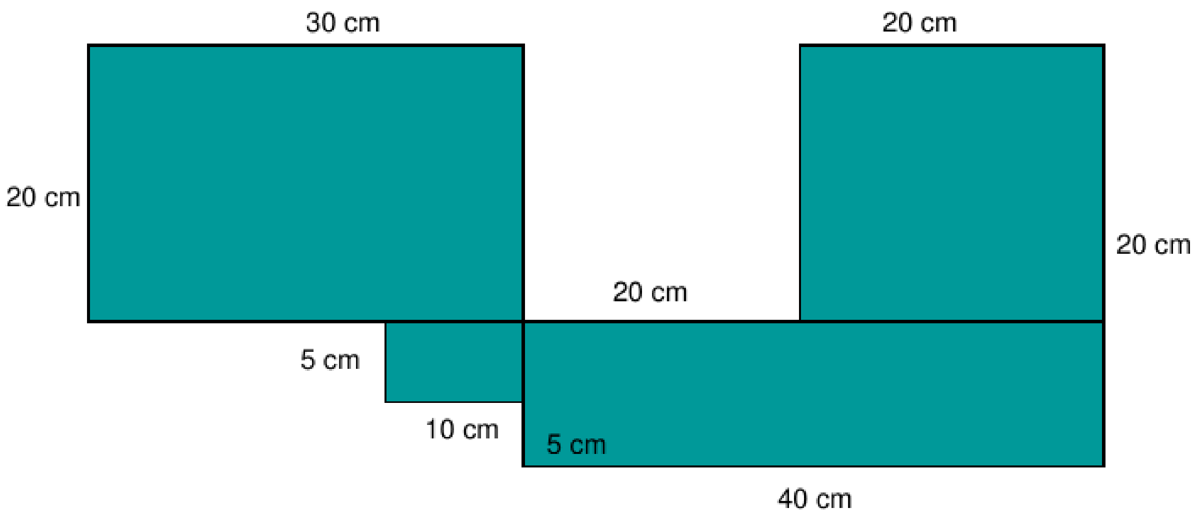
Ejercicio 3. Completa la serie de ángulos indicando los ángulos que tienes que sumar o restar en cada caso y dibuja cómo quedaría el abanico al final de la serie.



Ejercicio 4. Calcula el área de esta figura



Ejercicio 5. Calcula el perímetro y el área de esta figura

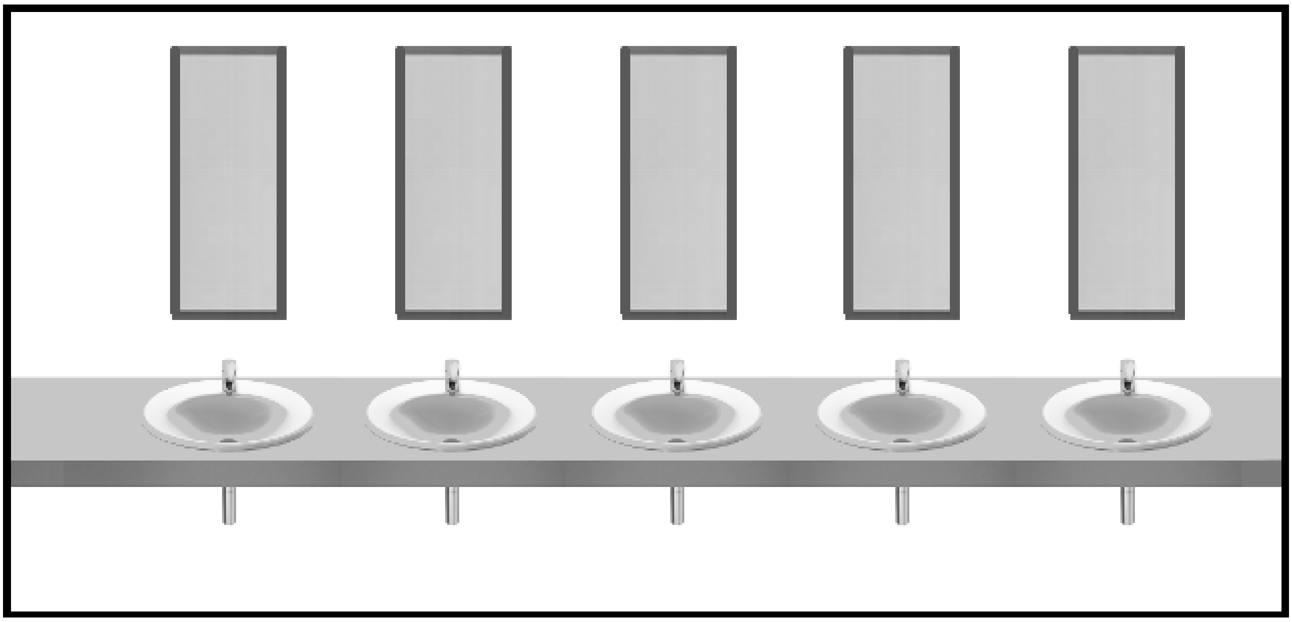


Anexo III. Portfolio para el alumnado

1. ¿Qué es una circunferencia?

Problema. Distancias de seguridad.

En la siguiente pared de un lavabo público, se quieren colocar enchufes sin estropear los espejos. La distancia mínima que tiene que haber entre un grifo y un enchufe es de un metro. Colorea la zona en la que podremos colocar enchufes sabiendo que los grifos de los lavabos están separados 1m entre sí.



- ¿Qué condición cumplen todos los puntos que pertenecen a la circunferencia?…………..

……………………………………………………………………………………………….

- ¿Qué condición cumplen todos los puntos que están en la parte exterior de la circunferencia?……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

- ¿Qué condición cumplen todos los puntos que están en la parte interior a la circunferencia?

……………………………………………………………………………………………….

Explica con tus palabras qué es una circunferencia.

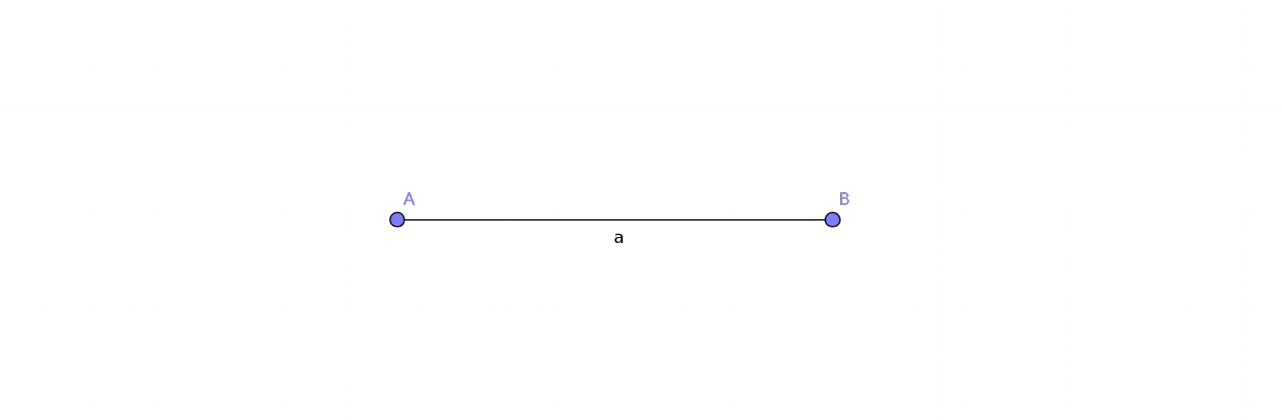
……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

Mediatriz de un segmento

Podemos definir mediatriz de un segmento como la recta perpendicular al segmento por su punto medio. Sin embargo, cuando queremos trazar una mediatriz, no lo hacemos basándonos en esta definición. Lo que hacemos es buscar, con ayuda de un compás, los puntos que estén a la misma distancia de los dos extremos.

Traza la mediatriz del segmento AB.



- ¿Qué condición cumplen todos los puntos que están en la mediatriz del segmento *a*?

…………………………………………………………………………………………….

- ¿Y los que no pertenecen a la recta? ¿Qué podemos decir de los puntos que estén a la izquierda de la mediatriz? ¿Y de los que están a la derecha?……………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

Basándote en cómo la trazamos, escribe con tus palabras una definición la mediatriz de un segmento *a* cuyos extremos son dos puntos *A* y *B*.

…………………………………………………………………………………………….

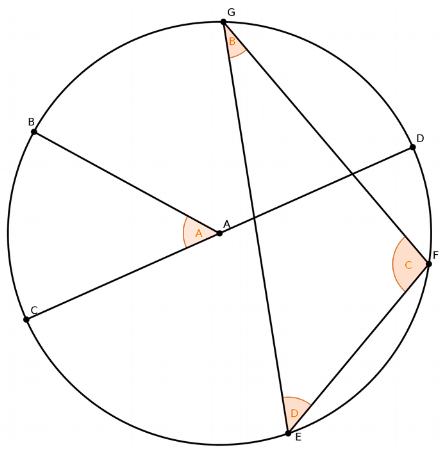
…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

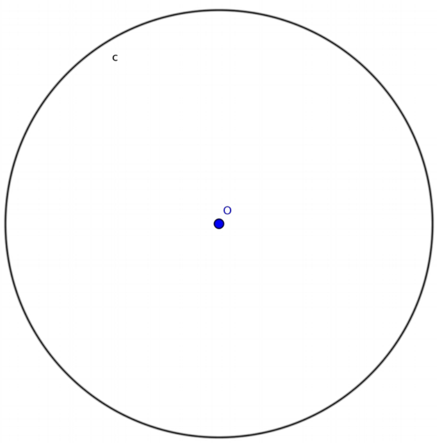
2. Relación entre los elementos de una circunferencia

Identifica en el dibujo los siguientes elementos:

Radio	Cuerda	Centro	Ángulo inscrito	Área del círculo
Diámetro	Arco	Ángulo central	Longitud de la circunferencia	Sector circular



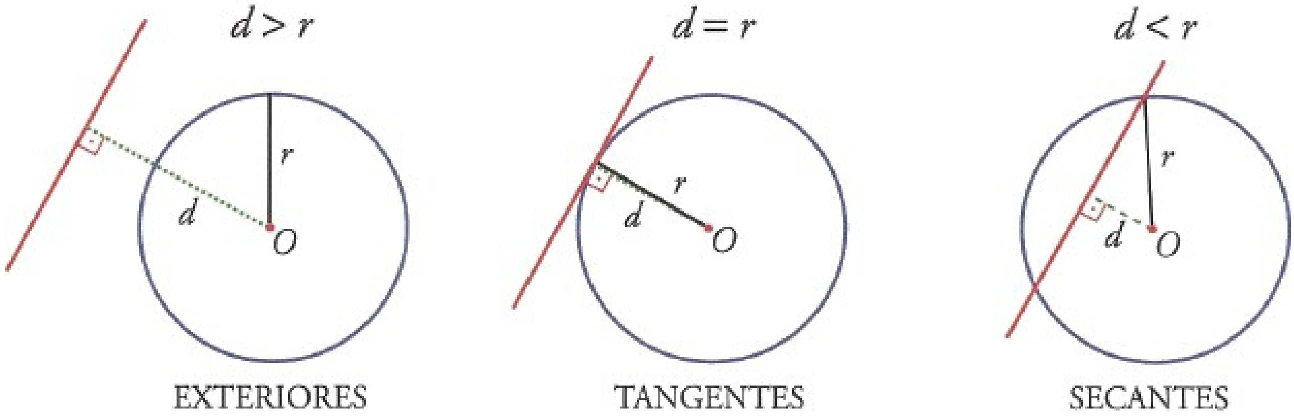
Dibuja varias cuerdas en una circunferencia y traza las mediatrices de todas ellas. ¿En qué punto se cortan?…………………………………………………………………………………….



Dibuja el ángulo central que define una de las cuerdas. Dobla la hoja por la mediatriz de la cuerda. ¿Qué ocurre con el ángulo? ¿Cómo son los ángulos en los que la mediatriz divide el ángulo central?……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

Posiciones relativas de recta y circunferencia



Extraído de Colera, J. y Gaztelu, I. (2011)

Teniendo en cuenta que hemos llamado *d* a la distancia de O a la recta, explica con tus palabras, cuándo decimos que:

- una recta y una circunferencia son exteriores…………………………………………...

……………………………………………………………………………………………….

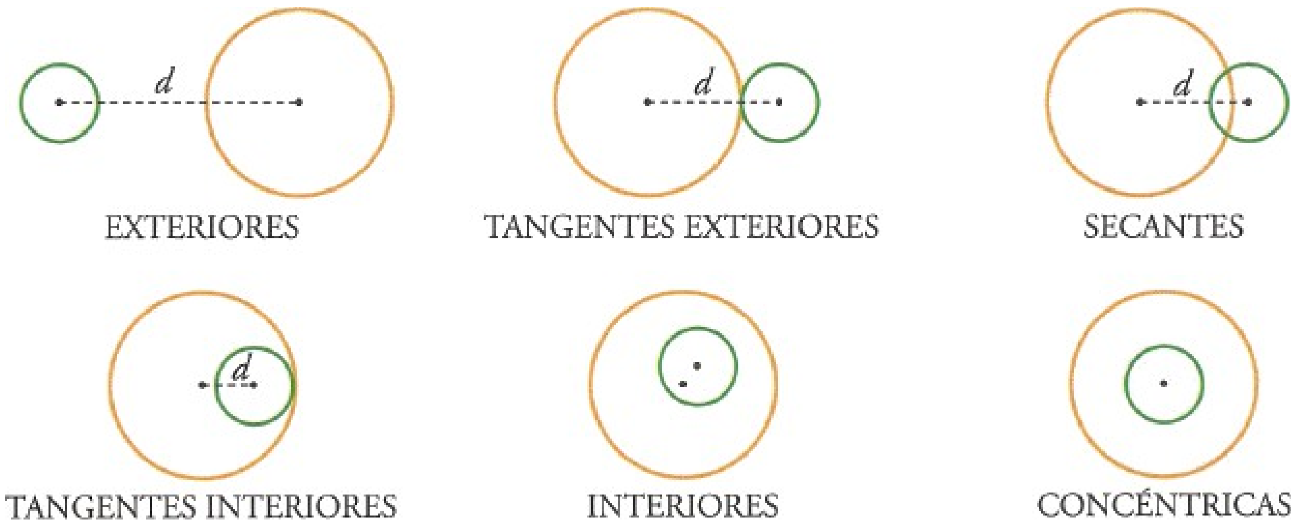
- una recta y una circunferencia son tangentes……………………………………………

……………………………………………………………………………………………….

- una recta y una circunferencia son secantes…………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

Posiciones relativas de dos circunferencias



Extraído de Colera, J. y Gaztelu, I. (2011)

Explica con tus palabras, cuándo decimos que (Ahora hemos llamado *d* a la distancia entre los dos centros de las circunferencias):

- dos circunferencias son exteriores………………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

- dos circunferencias son tangentes exteriores……………………………………………

………………………………………………………………………………………….

- dos circunferencias son secantes…………………………………………………….....

………………………………………………………………………………………….

- dos circunferencias son tangentes interiores…………………………………………….

………………………………………………………………………………………….

- dos circunferencias son interiores………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………….

- dos circunferencias son concéntricas…………………………………………………….

………………………………………………………………………………………….

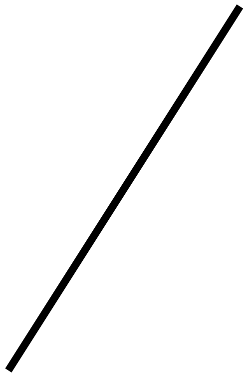
Ejercicio. Tangentes

Dibuja 3 circunferencias que sean:

- Tangentes a la recta que está dibujada

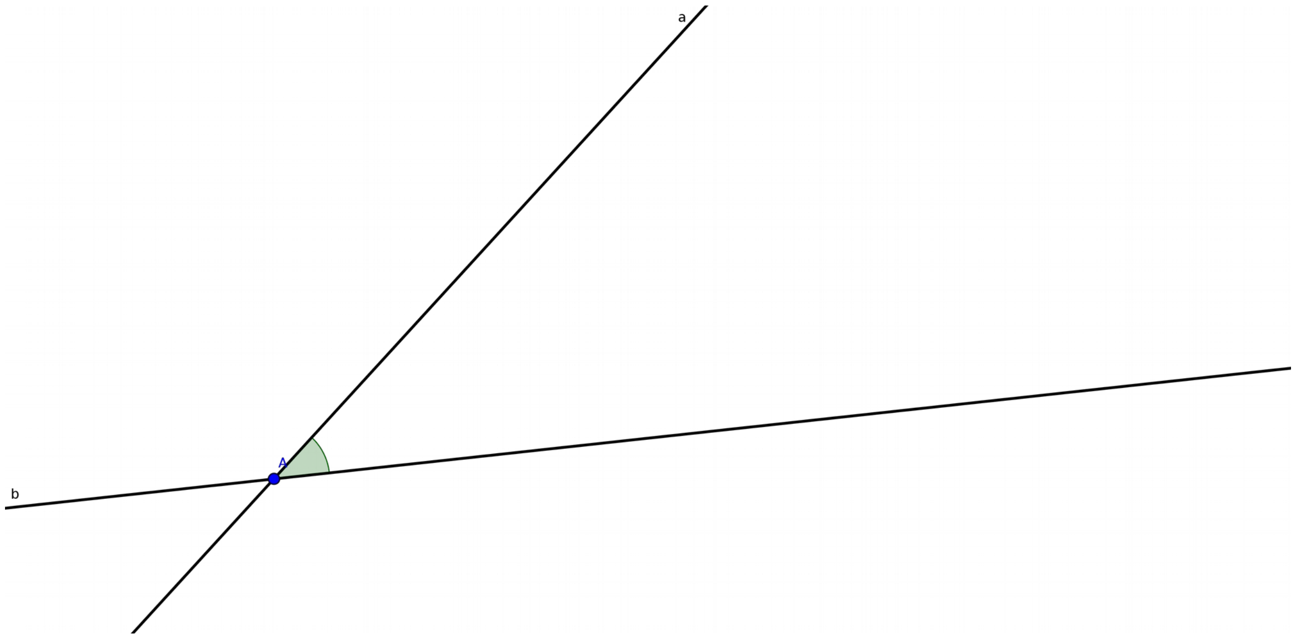
- Al menos una de ellas tiene que ser tangente interior a otra

- Al menos dos de ellas tienen que ser tangentes exteriores



Bisectriz de un ángulo

Traza la bisectriz del siguiente ángulo.



Experimento

Pregunta: ¿La longitud de una circunferencia será el doble de la de otra circunferencia cuyo diámetro sea la mitad? Es decir, ¿a doble diámetro le corresponde doble longitud? ¿Y si fuera triple?

Hipótesis: Una circunferencia que tenga el diámetro doble de largo que la de otra circunferencia, su longitud también será el doble. Y si su diámetro es el triple, su longitud también será el triple.

Preparación del experimento

Tenemos 3 objetos circulares. El Objeto 1 es el más pequeño. El Objeto 2 tiene el doble de diámetro que el Objeto 1; y el Objeto 3 el triple que el Objeto 1.

Hacemos una tabla con los valores esperados de número de vueltas

Cuando el Ob1 haya dado	n.º vueltas Objeto 1	el objeto 2 habrá dado	n.º vueltas Objeto 2	y el objeto 3	n.º vueltas Objeto 3
	1				
	2				
	3				
	4				
	5				
	6				
	7				
	8				
	9				

3. El número π

Realización del experimento

	Longitud del diámetro
Objeto 1	
Objeto 2	
Objeto 3	
Objeto 4	
Objeto 5	
Objeto 6	

Estoy en el grupo con el Objeto…..

Número de vueltas completas que ha dado cada objeto en función del n.º de vueltas del Objeto1.

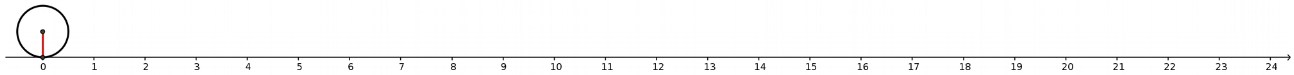
n.º vueltas Objeto 1	n.º vueltas Objeto 2	n.º vueltas Objeto 3	n.º vueltas Objeto 4	n.º vueltas Objeto 5	n.º vueltas Objeto 6
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					

Conclusión:

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

Medida de la constante de proporcionalidad



En la cinta pegada al suelo, haced marcas que estén a una distancia igual a la longitud del diámetro de vuestro objeto.

Haced rodar el objeto ajustando bien la marca del objeto con la línea de salida.

¿Cuántas vueltas habéis tenido que dar hasta que, aproximadamente, coincida la marca del objeto con la marca de un diámetro?………………………………….

¿A qué marca de diámetro corresponde?………………………….

¿Cómo llamamos a la constante de proporcionalidad entre la longitud de una circunferencia y su diámetro?…………………………………………..

A raíz de este experimento, ¿cuál es su valor aproximado?……………………….

Si repitiéramos el experimento con una cinta muchísimo más larga, en la que siguiéramos haciendo marcas a una distancia de un diámetro, ¿llegaríamos en algún momento a hacer coincidir exactamente la marca del diámetro con la marca hecha al objeto?…………………………………..

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

Escribe la fórmula que permite calcular la longitud de la circunferencia en función de su diámetro:

…………………………………………………………………………………………….

4. El área del círculo

Pregunta: ¿el área encerrada en una circunferencia será el doble de la de otra de radio la mitad? O lo que es lo mismo, ¿la suma de las áreas de dos círculos iguales es igual al área de un círculo de radio doble?

Hipótesis:

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

Realiza el siguiente dibujo:

- Dibuja dos circunferencias iguales que sean tangentes externas

- Con centro en el punto de tangencia, dibuja una circunferencia cuyo radio sea el diámetro de cualquiera de las dos pequeñas

- ¿Qué relación hay entre el radio de la circunferencia grande y el de las pequeñas?……

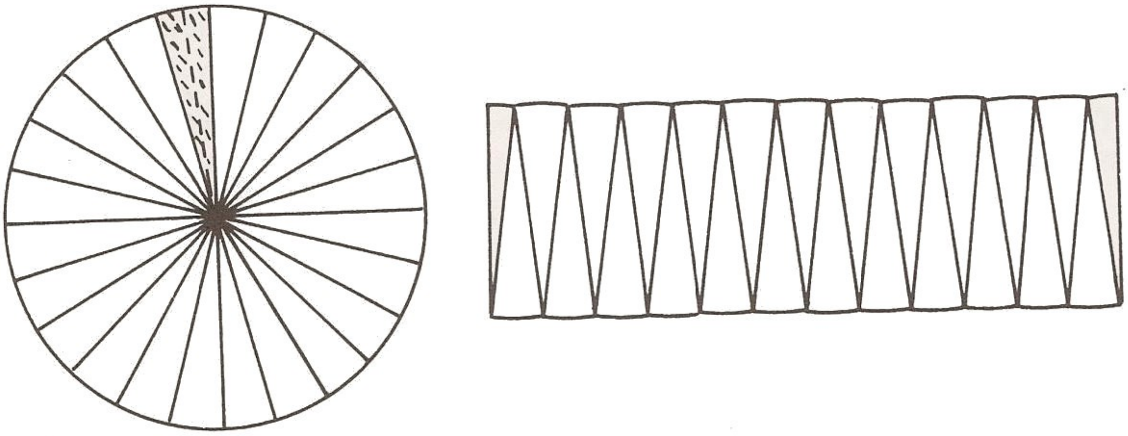
……………………………………………………………………………………………..

Conclusión:

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

En una hoja a parte, recorta una circunferencia, divídela en sectores iguales lo más pequeños que puedas (como mínimo en 16). Y pégalos en esta hoja como en la siguiente figura, en la que hemos dividido el círculo en 24 sectores:



- Base del rectángulo:………………..

- Altura del rectángulo:………………..

El área del rectángulo es igual a la del círculo. Así que la fórmula del área del círculo es:

………………………………………………………………………………………..

El área de un círculo es proporcional a ………………………………………..

¿Cuál es la constante de proporcionalidad?……………………..

5. Grupos interactivos

N.º de grupo:……………………..

MESA - A

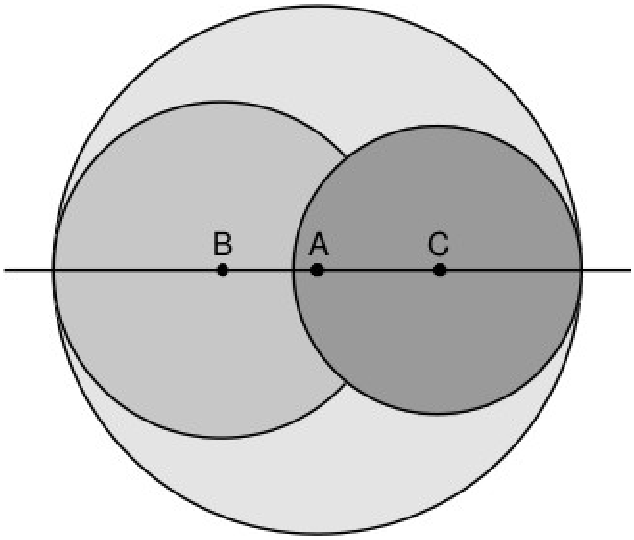
Ejercicio. Círculos con centros alineados.

Los tres círculos de la figura se solapan como se muestra en el dibujo y sus centros están en la misma línea recta.

El punto *A* es el centro del círculo mayor.

El punto *B* es el centro del círculo mediano.

El punto *C* es el centro del círculo menor.



Los diámetros de los círculos son: 22cm, 16cm y 13cm.

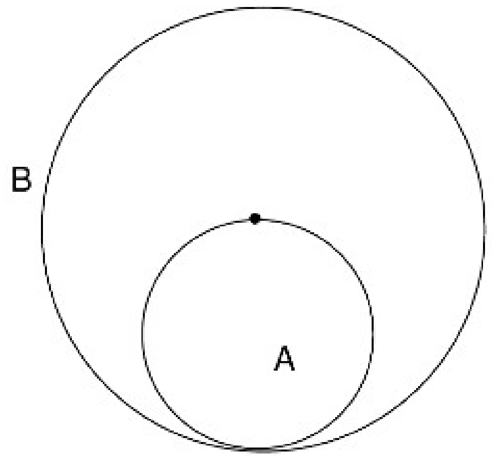
Calcula la longitud de los segmentos *BA* y *AC*

Ejercicio. Círculo interior. (AQA, 2008)

La circunferencia del círculo A es tangente interior a la circunferencia del círculo B y pasa por su centro.

El área del círculo A es de $100 cm^2$.

¿Cuál es el área del círculo B?



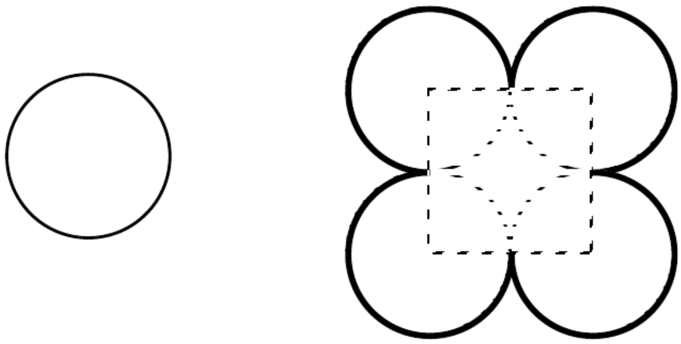
MESA -B

Ejercicio. Perímetro y Área. (AQA, 2008)

La longitud de esta circunferencia es de 24 cm.

Colocamos cuatro circunferencias como ésta formando la figura que se ve en el dibujo.

Los centros de las circunferencias son los vértices de un cuadrado.



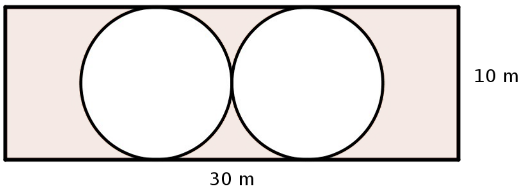
¿Cuánto mide el perímetro de la figura que forman?

¿Y el área? (Se incluye todo lo que está encerrado en el perímetro)

MESA – C

Ejercicio. Fuentes circulares

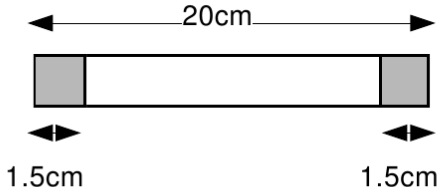
En un terreno rectangular se construyen dos fuentes circulares, como se muestra en la figura, y se planta césped en el terreno restante. ¿Qué superficie ocupa el césped?

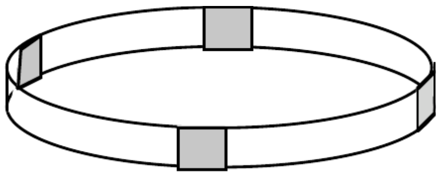


Ejercicio. Aro de papel

La longitud de la tira de papel es de 20 cm y tiene 1.5 cm de zona adhesiva en cada extremo.

Pegamos 4 tiras de papel de manera que las zonas adhesivas se solapen perfectamente para construir un aro de papel.





Calcula la longitud del aro.

Calcula el diámetro de la circunferencia más grande que podríamos hacer con este aro.

6. Ángulos y arcos

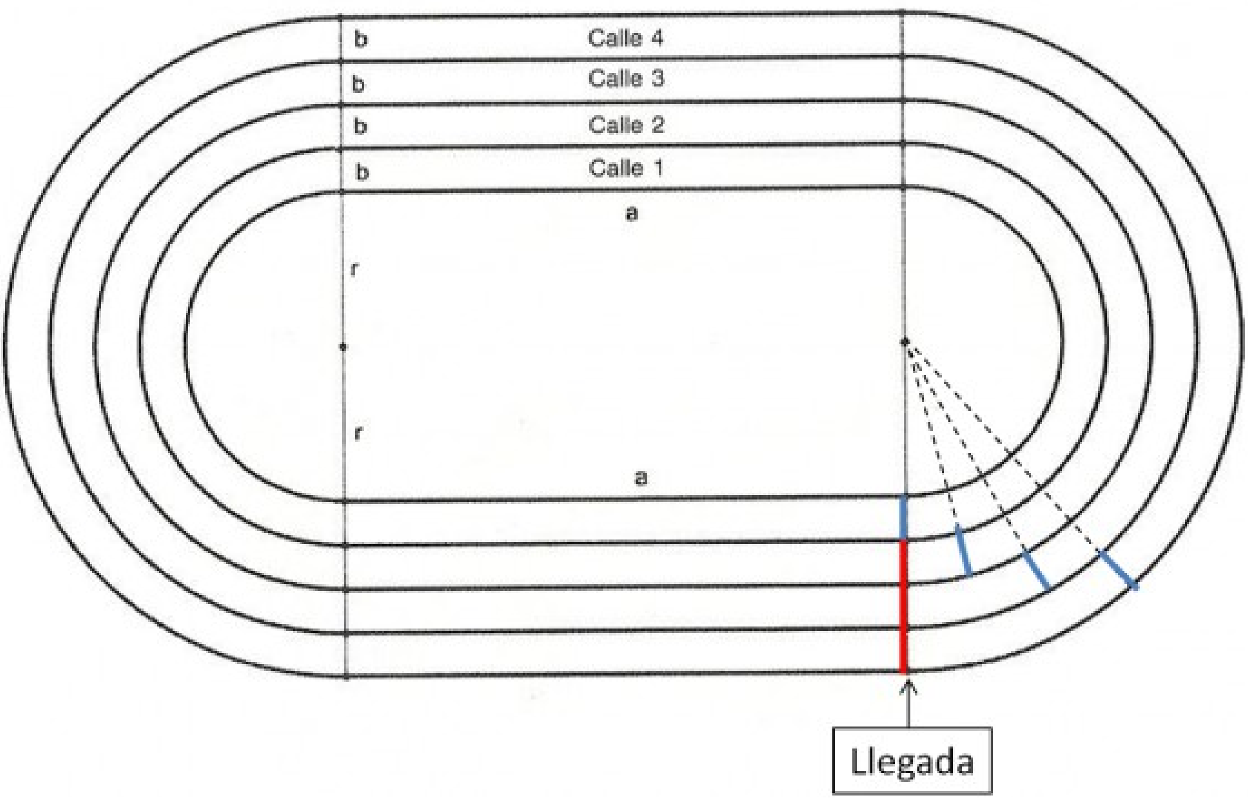
Problema. Diseño de una pista de atletismo cubierta.

En una instalación deportiva hay una pista de atletismo cubierta que tiene las siguientes características:

- La línea interior tiene, en total, una longitud de 200m

- Tiene 4 calles y cada calle tiene una anchura de 1m

- La pista está formada por dos partes rectas de 38m cada una y dos partes curvas iguales, que son semicircunferencias.



En este dibujo, la salida para la carrera de 200m para cada una de las calles está marcada con una línea verde y la llegada con una roja (excepto para la calle 1, que coincide la línea de salida con la de llegada).

Para que todos los corredores recorran la misma distancia, calcula la posición en la que tendríamos que pintar las líneas de salida de las calles 2, 3 y 4.

Quizá nos venga bien ir organizando los datos que vamos conociendo en una tabla:

	Radio interior	Longitud de la línea interior	Distancia de la salida (desde meta)
Calle 1	$r_1 = ... m$	$l_1 = 200\, m$	$d_1 = ... m$
Calle 2			
Calle 3			
Calle 4			

El personal que tiene que pintar las líneas de salida no tiene ningún aparato que permita medir distancias sobre líneas curvas. Sin embargo, sí que pueden medir ángulos. Vamos a dar la información de otra manera.

	Radio interior	Distancia de la salida (desde meta)	Ángulo central
Calle 1	$r_1 = ...m$	$d_1 = 0\,m$	$\alpha_1 = ...^o$
Calle 2			
Calle 3			
Calle 4			

- Escribe una fórmula que nos permita conocer la amplitud de un ángulo central en una circunferencia conociendo la longitud del arco que lo define y el radio de la circunferencia.

…………………………………………………………………………………………………….

- Y si conociéramos la amplitud del ángulo y el radio, ¿cómo calcularías la longitud del arco?

…………………………………………………………………………………………………….

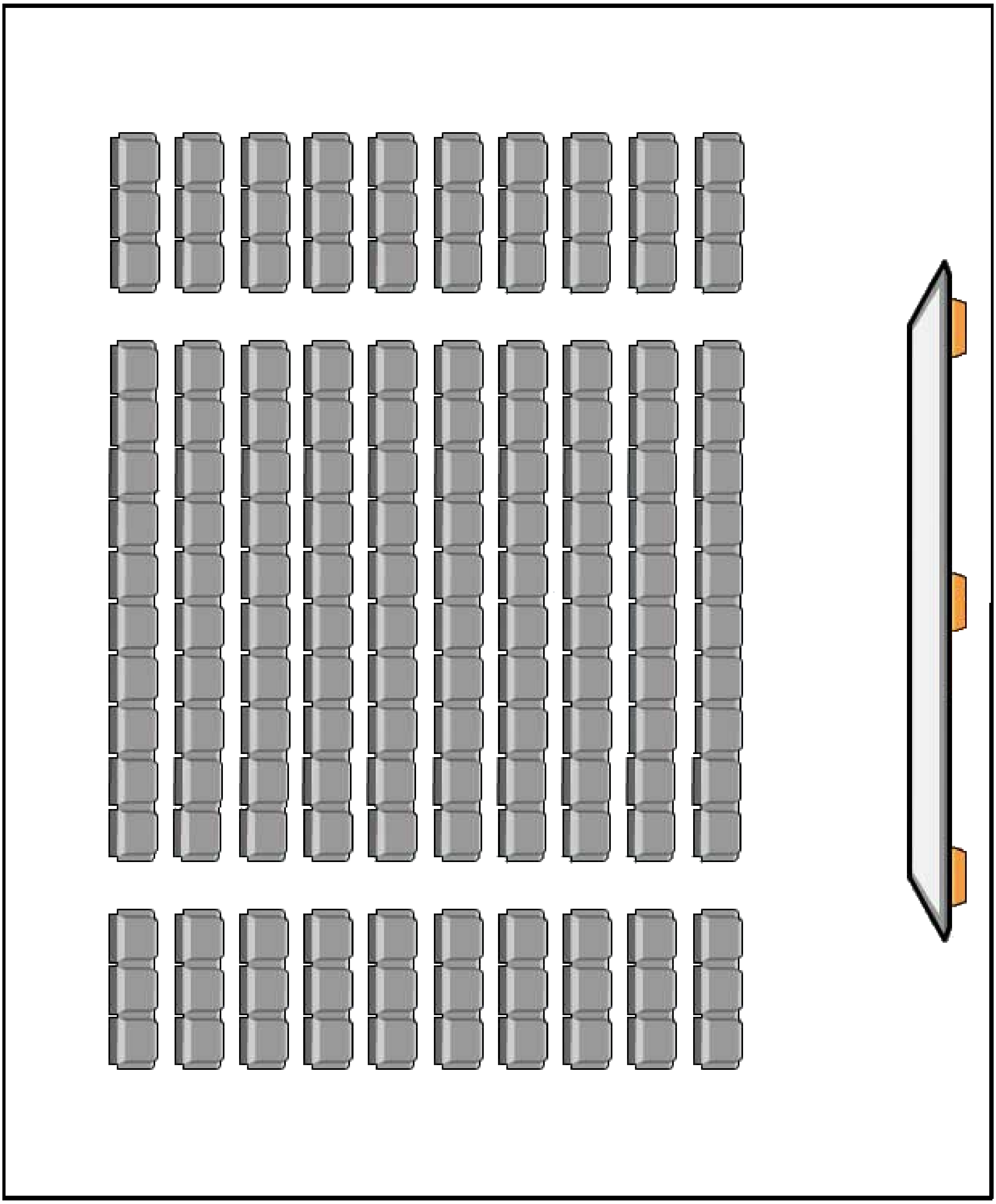
- Y, por último, si lo que conociéramos fuese el ángulo y la longitud del arco, ¿podríamos saber cuál es el radio de la circunferencia?

…………………………………………………………………………………………………….

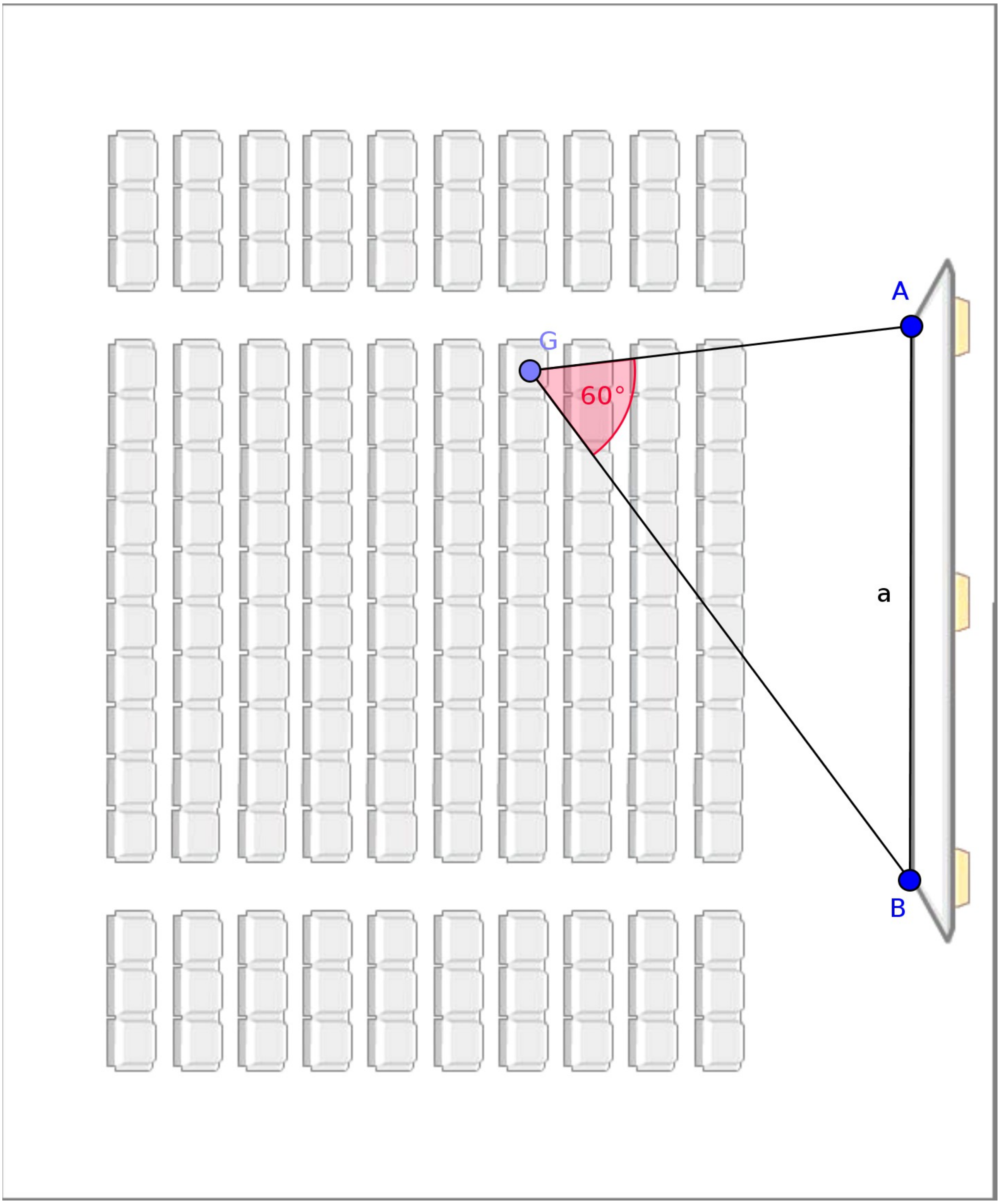
7. Ángulos inscritos

Problema. Sala de cine.

En una sala de cine se han dado cuenta de que hay unas cuantas butacas en las que no podemos ver con nitidez toda la pantalla de vez. Suponiendo que para tener una vista enfocada, el ángulo de visión central del ser humano es de 90º. Marca las butacas que se deberían quitar.



Si una persona tuviera un ángulo de visión central de 60º, ¿en qué asientos no le convendría sentarse?



Escribe con tus palabras la relación que hemos encontrado entre:

- una circunferencia
- un arco de esa circunferencia delimitado por dos puntos
- todos los ángulos inscritos que pueden trazarse, cuyos vértices estén en el arco y cuyos lados corten a la circunferencia en los puntos que delimitan el arco.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

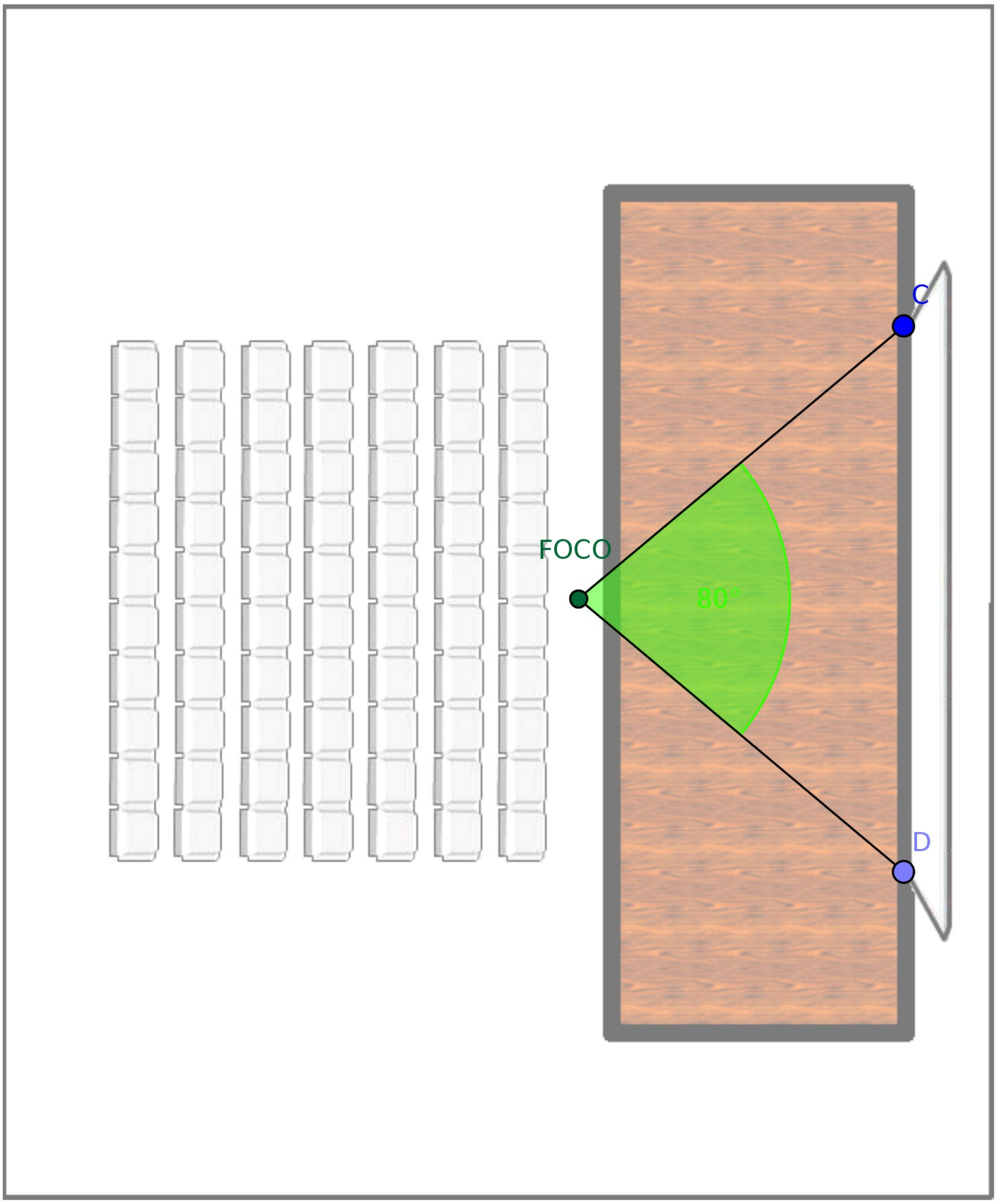
…………………………………………………………………………………………………

8. Ángulos centrales

Problema. Foco en un teatro.

En un teatro, se estropea el foco central para iluminar la parte más importante del escenario. El foco estropeado tiene un amplitud de 80º y, al ser el foco central, está colocado de manera que el centro de su haz de luz ilumina el centro del escenario incidiendo con un ángulo de 90º.

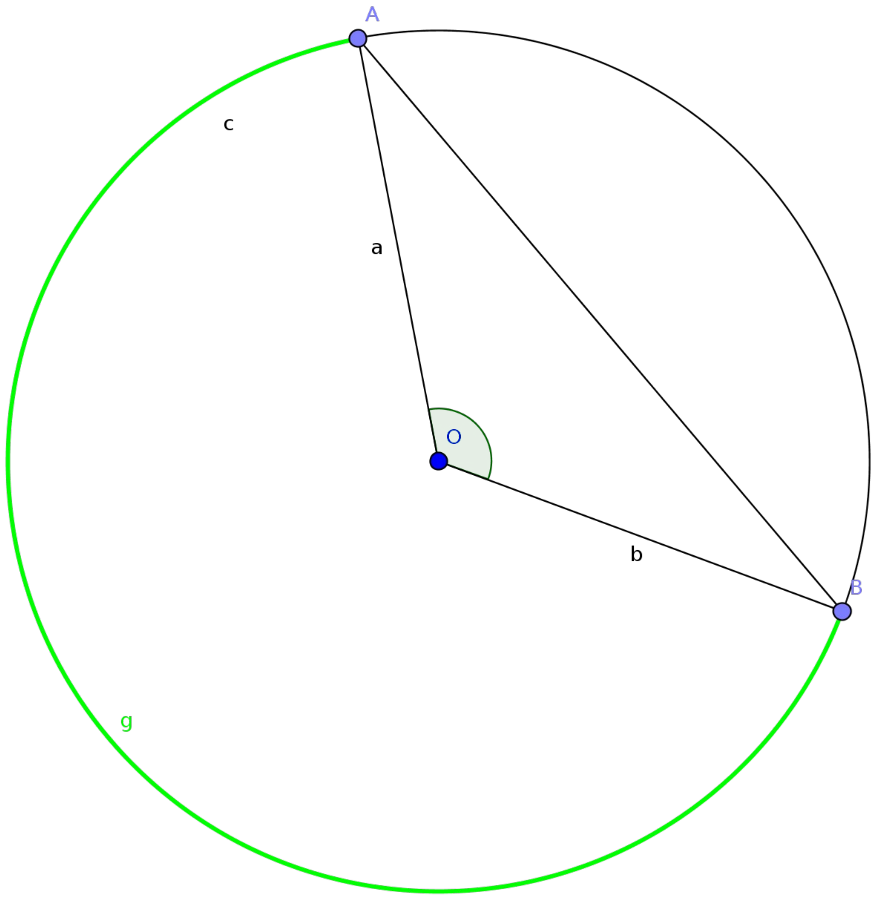
Sólo tenemos disponible otro foco de 40º para iluminar la misma zona, ¿dónde podríamos que colocarlo para que pueda iluminar la misma parte del escenario que el roto?



¿Cómo cambiaría el problema si el foco estropeado fuera de 100º y tuviéramos focos de 50º?

…………………………………………………………………………………………………...

Hipótesis: "El ángulo central determinado por un arco de circunferencia tiene el doble de amplitud que los ángulos inscritos con vértice en ese arco y cuyos lados cortan a la circunferencia en los extremos del arco." Y ahora vamos a ver si es correcta:



Conclusiones:

……………………………………………………………………………………………………

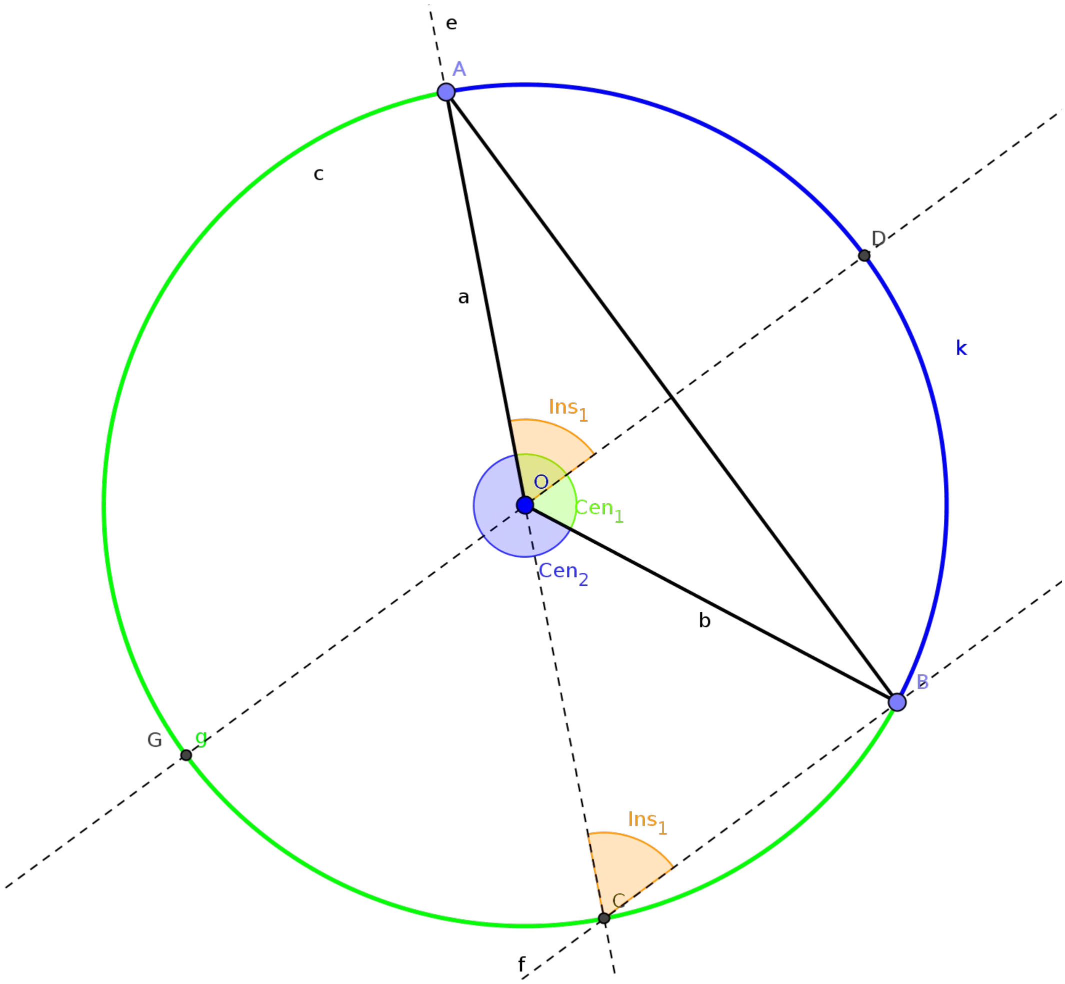
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

9. Al otro lado de la cuerda.

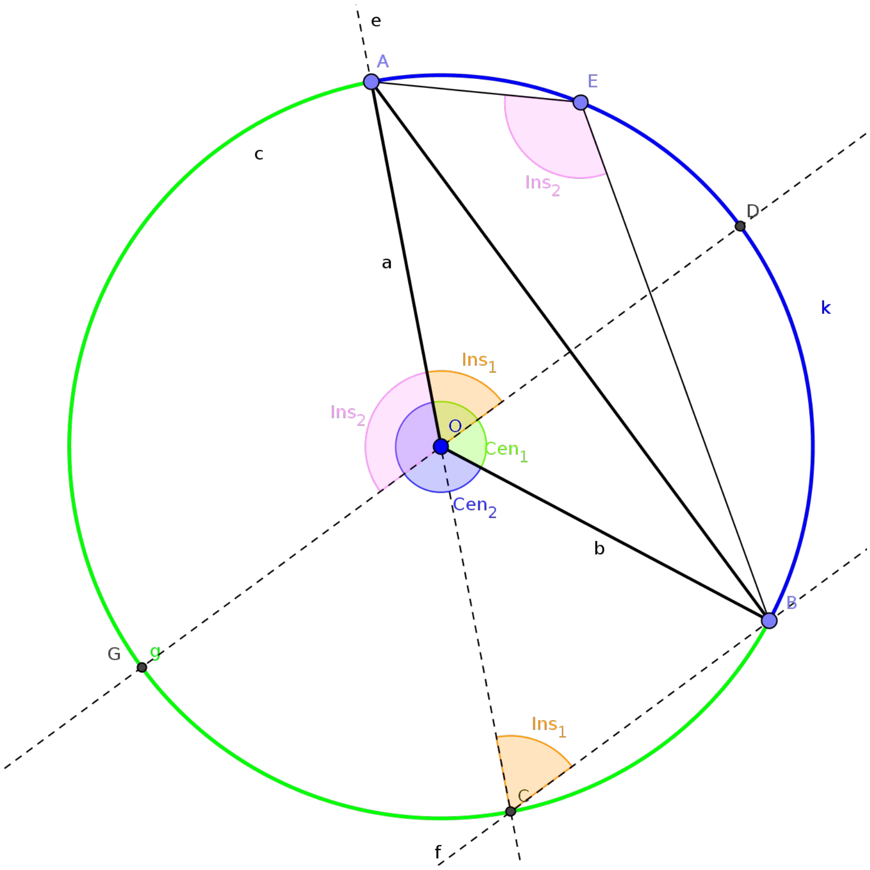
Seguro que a nadie se le ha escapado el hecho de que, cuando definimos una cuerda en una circunferencia, no sólo hay un arco, ni sólo un ángulo central, sino que hay dos arcos sobre los que podemos inscribir ángulos y dos ángulos centrales.



Vamos a fijarnos en dos cosas:

3. El ángulo que hemos recortado es la mitad del ángulo azul.
4. Este ángulo y el naranja suman 180º.

Vamos a poner nombres a los ángulos y dejar claras estas relaciones que hemos encontrado:



Completa

- Todos los ángulos inscritos que tracemos con vértice en el arco de color verde y que corten a la circunferencia en A y B, son iguales e iguales a ……..

- El ángulo central ………... es el doble que Ins_1.

- Todos los ángulos inscritos que tracemos con vértice en el arco de color azul y que corten a la circunferencia en A y B, son iguales e iguales a ……...

- El ángulo central Cen_2 es el doble que ……….

- Cen_1 y Cen_2 suman ……...º

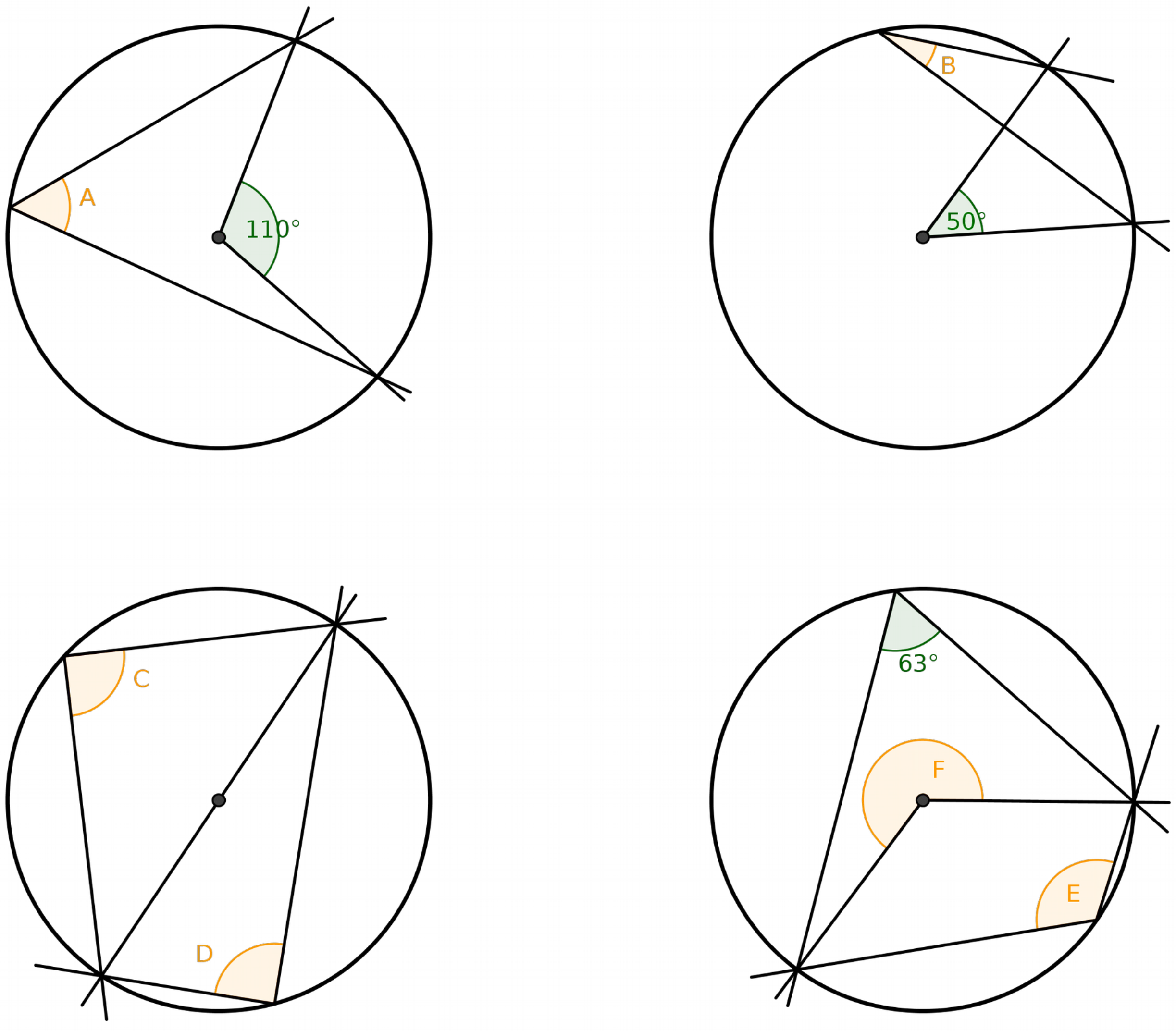
- Ins_1 e ……. son ángulos suplementarios y suman ………º

Ejercicio. Agujas del reloj

- ¿Qué ángulos forman las saetas de un reloj cuando marcan las 2 en punto?

Ejercicio. Ángulos

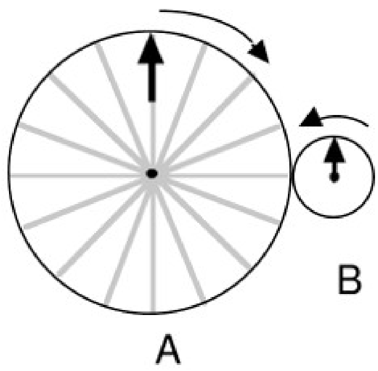
Halla el valor de los ángulos indicados:



Problema. Ruedas

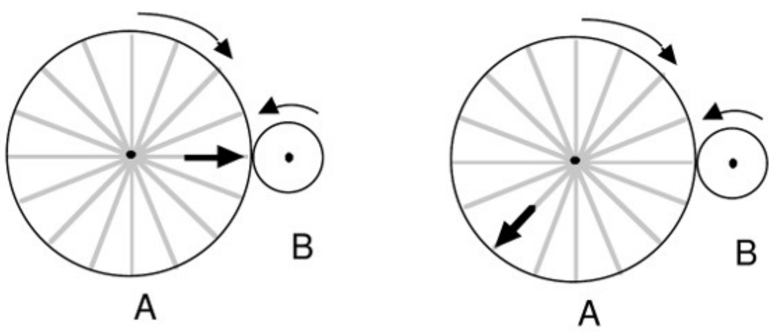
Las ruedas A y B giran juntas en sentidos opuestos. Mientras la rueda A hace una vuelta completa en sentido de las agujas del reloj, la rueda B hace 4 vueltas en sentido contrario.

En este dibujo se muestra cómo están las ruedas al inicio.

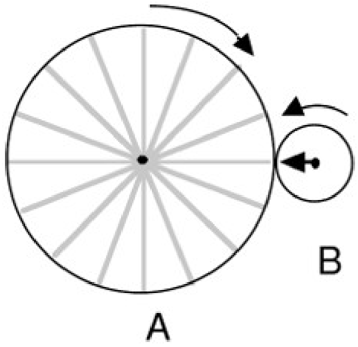


Los siguientes diagramas muestran distintas posiciones de las ruedas una vez que han empezado a girar.

En cada uno de estos casos dibuja la flecha que falta en la rueda B.



En este diagrama dibuja todas las posibles posiciones de la flecha en la rueda A.

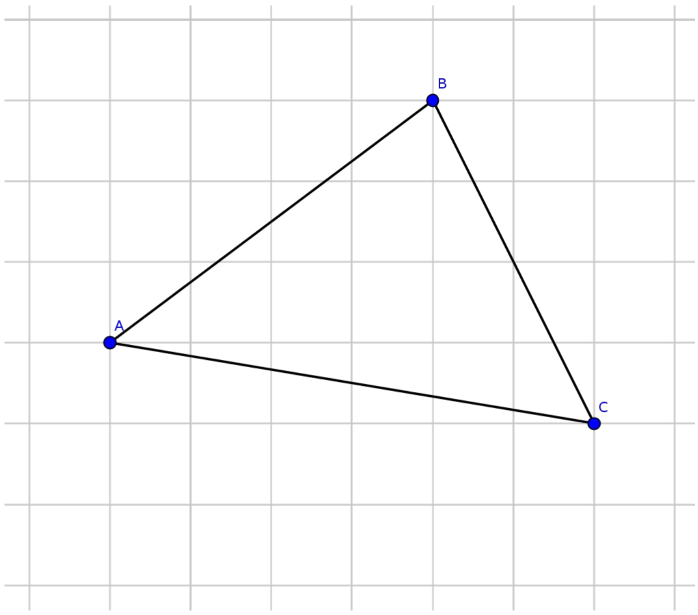


10. Figuras inscritas.

Grupos interactivos

MESA – A. Circunferencias y triángulos.

Ejercicio 1. Traza la circunferencia circunscrita de este triángulo.



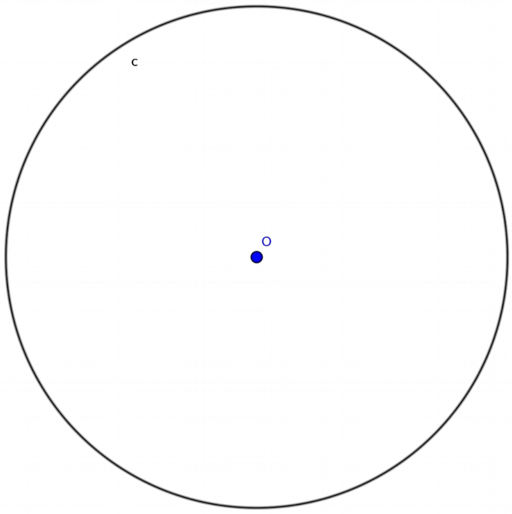
¿Puede haber más de una? ¿Por qué?

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

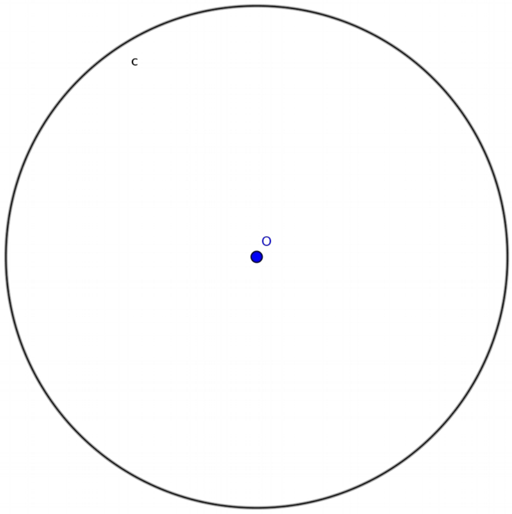
Ejercicio 2. Construye un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia



Ejercicio 3. Construye un triángulo equilátero

MESA – B. Circunferencias y cuadriláteros.

Ejercicio 1. Dibuja un cuadrilátero irregular inscrito en una circunferencia. Traza una diagonal del cuadrilátero.

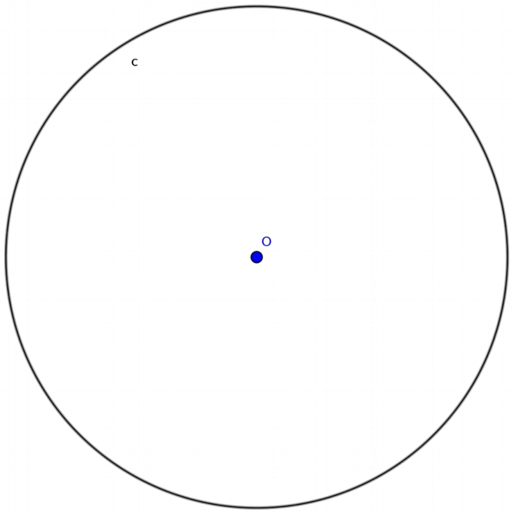


¿Cuánto suman los ángulos inscritos que están a cada lado de la diagonal? ………………..……

¿Por qué?……………………………………………………………………………………..…

……………………………………………………………………………………………………….

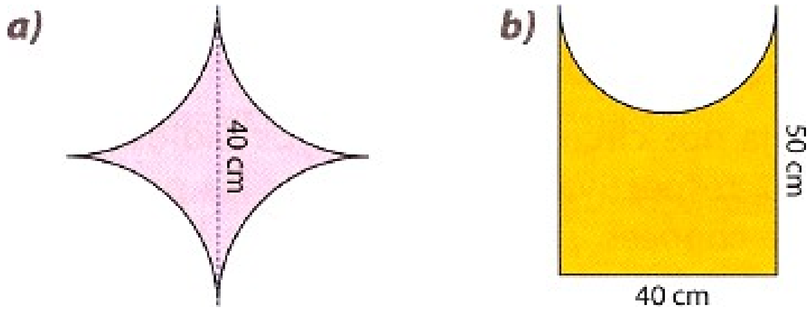
Ejercicio 2. Dibuja un cuadrado inscrito en una circunferencia.



MESA – C. Perímetros y Áreas.

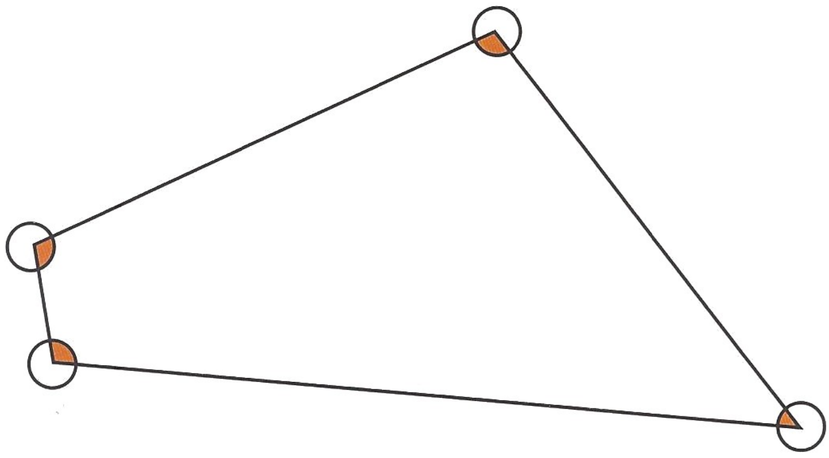
Ejercicio 1.

Calcula el perímetro de las siguientes figuras:



Ejercicio 2.

Tenemos 4 aros iguales de 1 cm de radio. Los unimos entre ellos y obtenemos un cuadrilátero irregular. ¿Cuánto mide el área sombreada de color naranja?



Anexo IV. Grupos Interactivos

Dinámica de los Grupos Interactivos

¿Qué son los grupos Interactivos?

“Los grupos interactivos es la forma de organización del aula que da los mejores resultados en la actualidad en cuanto a la mejora del aprendizaje y la convivencia. Se multiplican y diversifican las interacciones, de manera que aumenta el tiempo de trabajo efectivo. Se caracterizan por ser una organización inclusora del alumnado en la que se cuenta con la ayuda de más personas adultas además del profesor o profesora responsable del aula. (…) En los grupos interactivos se logra desarrollar, en una misma dinámica, la aceleración del aprendizaje para todo el alumnado en todas las materias, los valores, las emociones y sentimientos como la amistad.”

¿Cómo se organizan?

“En el aula se realizan agrupaciones heterogéneas en cuanto a nivel de aprendizaje, género, cultura, etc. de alumnos y alumnas. En cada grupo se realiza una actividad concreta corta de tiempo mientras una persona adulta (voluntaria, familiar, otro profesorado o profesional de otro ámbito) tutoriza el grupo asegurando que trabajen la actividad y que se desarrolle aprendizaje entre iguales. Al ser grupos heterogéneos, siempre hay estudiantes que acaban antes la actividad, con lo que la persona que tutoriza el grupo se encarga de que ayuden a sus compañeros y compañeras, generando un diálogo y unas interacciones que aceleran el aprendizaje de todo el alumnado y no solamente del que va más retrasado. Habitualmente (no es imprescindible), cuando pasa un tiempo previamente determinado por el profesor o la profesora (15 o 20 minutos dependiendo del tiempo previsto para cada actividad) cada grupo se levanta de la mesa y se sienta en otra, cambiando de actividad y de persona tutora”

Extraído de http://utopiadream.info/ca/actuaciones-de-exito/grupos-interactivos/

Dado que las clases son de 50 minutos, para cada sesión de GI, se proponen sólo 3 bloques de actividades de unos 15 minutos de duración, de manera que, si fueran necesarios 6 grupos de 4 ó 5 estudiantes para recoger a todo el alumnado, se duplicarían las mesas y el número de voluntarios o voluntarias necesario.

Hojas para las personas voluntarias

Sesión 5. Consolidación

MESA - A

Ejercicio. Círculos con centros alineados.

Los tres círculos de la figura se solapan como se muestra en el dibujo y sus centros están en la misma línea recta.

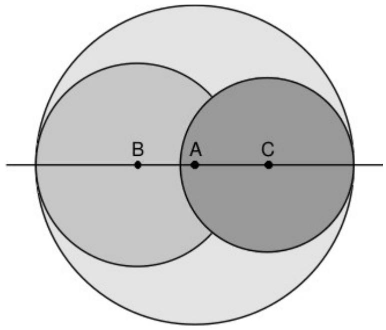
El punto *A* es el centro del círculo mayor.

El punto *B* es el centro del círculo mediano.

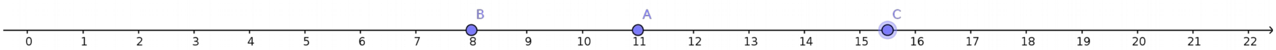
El punto *C* es el centro del círculo menor.

Los diámetros de los círculos son: 22cm, 16cm y 13cm.

Calcula la longitud de los segmentos *BA* y *AC*



Solución



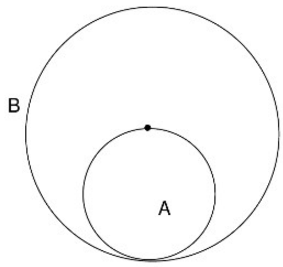
Longitud BA: 3 cm
Longitud AC: 4,5 cm

Ejercicio. Círculo interior. (AQA, 2008)

La circunferencia del círculo A es tangente interior a la circunferencia del círculo B y pasa por su centro.

El área del círculo A es de 100 cm² .

¿Cuál es el área del círculo B?



Solución
El radio del círculo B es el doble que el del círculo A.
El del círculo B será 4 veces mayor que la del círculo A.

Área_B= 400 cm²

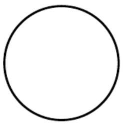
MESA -B

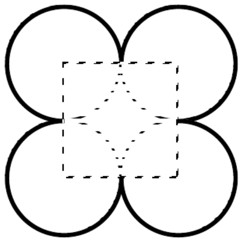
Ejercicio. Perímetro y Área. (AQA, 2008)

La longitud de esta circunferencia es de 24 cm.

Colocamos cuatro circunferencias como ésta formando la figura que se ve en el dibujo.

Los centros de las circunferencias son los vértices de un cuadrado.





¿Cuánto mide el perímetro de la figura que forman?

¿Y el área? (Se incluye todo lo que está encerrado en el perímetro)

Solución

Perímetro: el equivalente a 3 circunferencias. **P = 24·3 = 72 cm**

Área: suma del área de los 4 círculos + figura central =
suma del área de 3 círculo + área de un cuadrado d·d

Radio: $r=\frac{12}{\pi}=3{,}82\,cm$

Diámetro: $d=\frac{24}{\pi}=7{,}64\,cm$

Área de un círculo: $A_{cir}=\pi\cdot r^2=\pi\frac{12^2}{\pi^2}=45{,}86\,cm^2$

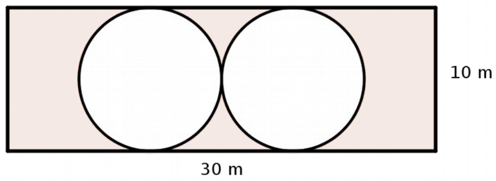
Área del cuadrado central: $A_{cua}=d^2=\frac{24^2}{\pi^2}=58{,}42\,cm^2$

A= 3 · 45,86 + 58,42 = 196 cm²

MESA – C

Ejercicio. Fuentes circulares

En un terreno rectangular se construyen dos fuentes circulares, como se muestra en la figura, y se planta césped en el terreno restante. ¿Qué superficie ocupa el césped?



Solución
Superficie de una de las fuentes: $A_{fuente}=\pi\cdot r^2=\pi\cdot 5^2=78{,}5\,m^2$
Superficie de todo el terreno: $A_{total}=30\cdot 10=300\,m^2$
Superficie de césped: $A_{cesped}=300-2\cdot 78{,}5=143\,m^2$

Ejercicio. Aro de papel

La longitud de la tira de papel es de 20 cm y tiene 1.5 cm de zona adhesiva en cada extremo.

Pegamos 4 tiras de papel de manera que las zonas adhesivas se solapen perfectamente para construir un aro de papel.

Calcula la longitud del aro.

Calcula el diámetro de la circunferencia más grande que podríamos hacer con este aro.

Solución
Longitud del aro: **L=74cm**
Diámetro de la circunferencia más grande: $d=\frac{74}{\pi}=23{,}57\,cm$

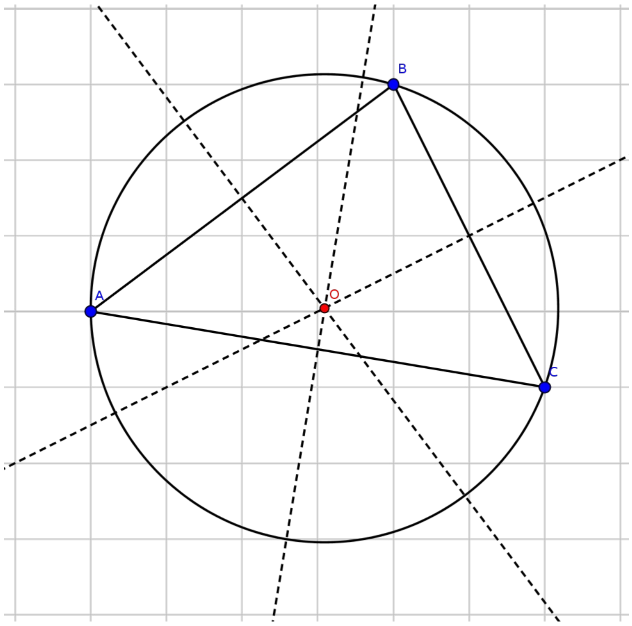
Sesión 10. Figuras inscritas.

Grupos interactivos

MESA – A. Circunferencias y triángulos.

Ejercicio 1. Traza la circunferencia circunscrita de este triángulo.

Solución
El centro es el punto de corte de las mediatrices de sus lados.
El radio, la distancia del centro a cualquiera de los vértices del triángulo



¿Puede haber más de una? ¿Por qué?

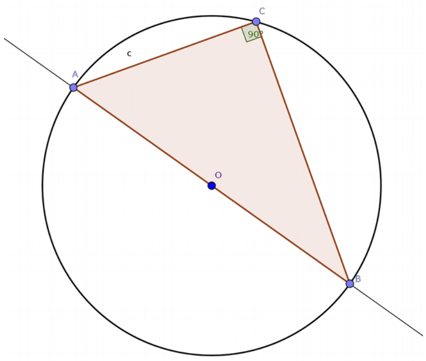
Solución

Sólo hay una porque el centro de la circunferencia tiene que cumplir, simultáneamente, estar a la misma distancia de A y de B (es decir, pertenecer a la mediatriz de AB); estar a la misma distancia de B y C (es decir, pertenecer a la mediatriz de BC) y estar a la misma distancia de A y de C (es decir, pertenecer a su mediatriz de AC). Esas condiciones sólo puede cumplirlas un punto, y el radio viene determinado por la distancia de ese punto a A, B ó C.

Ejercicio 2. Construye un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia

Solución

Trazamos un diámetro de la circunferencia y elegimos como dos de los vértices los dos extremos del diámetro.
El tercer vértice puede ser cualquier otro punto de la circunferencia.

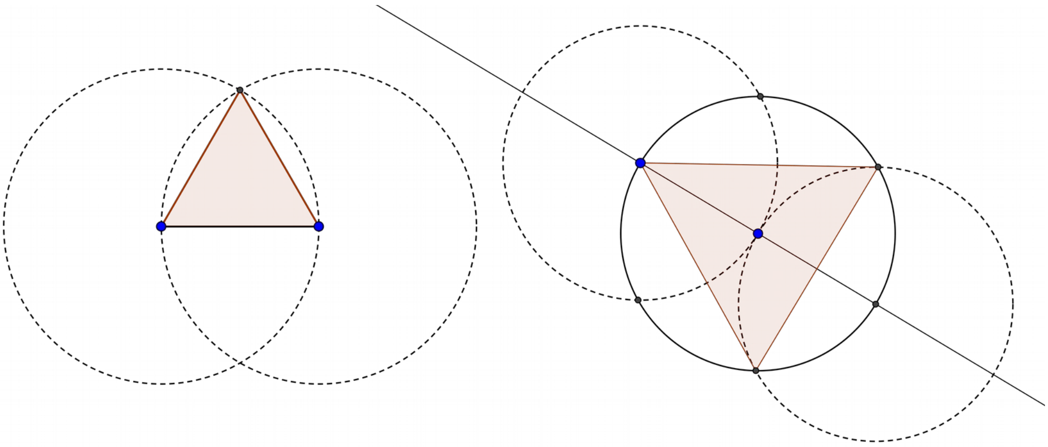


Ejercicio 3. Construye un triángulo equilátero

Solución

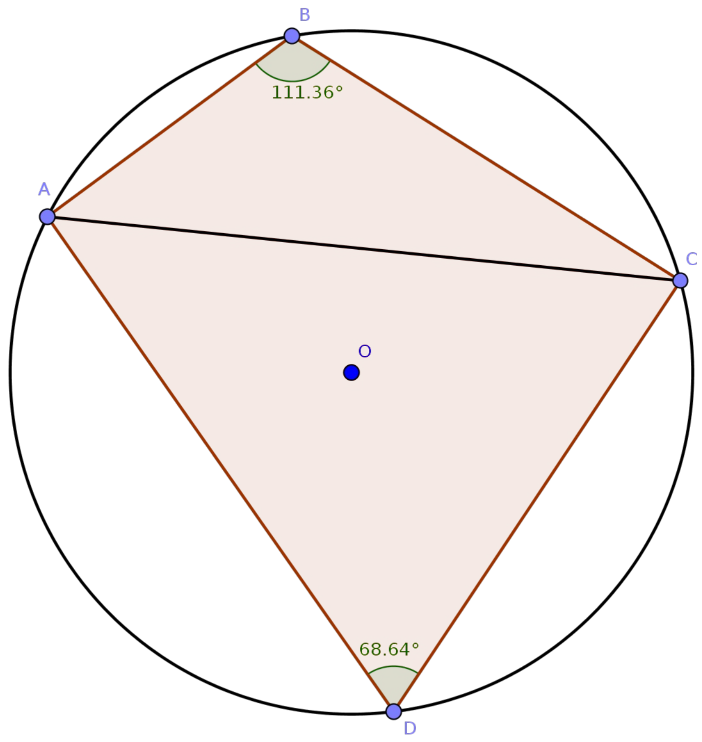
Cualquiera de las dos figuras es válida.
En la primera, dado un segmento que será un lado del triángulo, se buscan todos los puntos que estén a la distancia del lado de cada uno de los extremos. Cualquiera de los dos puntos de corte de las dos circunferencias puede ser el tercer vértice del triángulo equilátero.

Como segunda solución, se partiría de la construcción de un hexágono regular pero uniendo sólo los vértices alternos. Esto no se ha visto en clase pero podrían saberlo.



MESA – B. Circunferencias y cuadriláteros.

Ejercicio 1. Dibuja un cuadrilátero irregular inscrito en una circunferencia. Traza una diagonal del cuadrilátero.



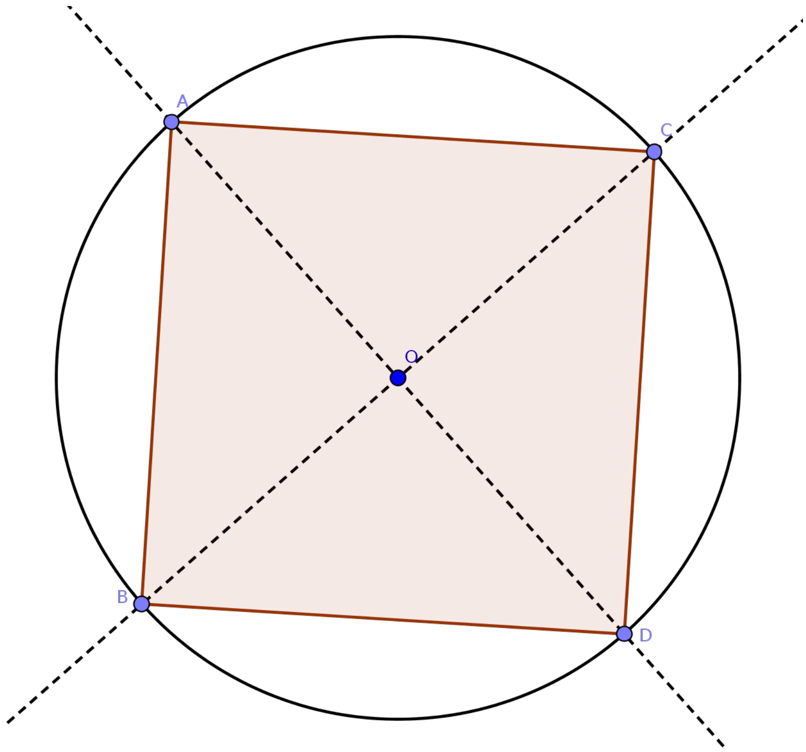
¿Cuánto suman los ángulos inscritos que están a cada lado de la diagonal? 180º

¿Por qué? Porque esos ángulos están inscritos en cada uno de los dos arcos que están determinados por una misma cuerda.

Ejercicio 2. Dibuja un cuadrado inscrito en una circunferencia.

Solución

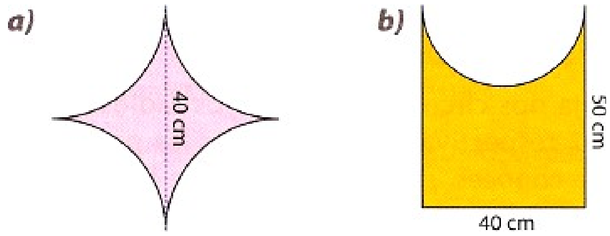
Una solución posible es trazar dos diámetros perpendiculares. Esos diámetros serán las diagonales del cuadrado.



MESA – C. Perímetros y Áreas.

Ejercicio 1.

Calcula el perímetro de las siguientes figuras:



Solución

a) El perímetro es el equivalente al de una circunferencia de 40 cm de diámetro:

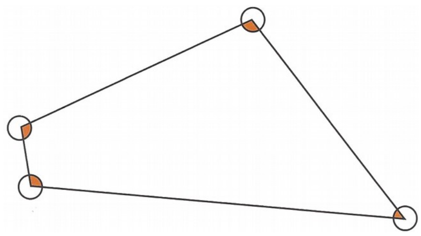
$$P_a = \pi \cdot d = \pi \cdot 40 = 125{,}6\,cm$$

b) El perímetro es la suma de los tres lados rectos y de una semicircunferencia de 40 cm de diámetro. Como hemos calculado en el apartado anterior el de la circunferencia entera:

$$P_b = 2 \cdot 50 + 40 + \frac{\pi \cdot 40}{2} = 202{,}8\,cm$$

Ejercicio 2.

Tenemos 4 aros iguales de 1 cm de radio. Los unimos entre ellos y obtenemos un cuadrilátero irregular. ¿Cuánto mide el área sombreada de color naranja?



Solución

El área es la equivalente a la de un círculo de 1 cm de diámetro:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1 = 3{,}14\,cm^2$$

ya que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero siempre es un ángulo completo (360º) y, por tanto, la suma de las áreas de los cuatro sectores circulares de la figura es el área de un círculo completo.